Föll af einni raunbreytu

Eggert Briem
Jón Ingólfur Magnússon

RAUNFALLAGREINING

Föll af einni raunbreytu

Háskólaútgáfan 2005

Formáli

Raunfallagreining heitir sú grein stærðfræði sem fæst við raungild föll. Jafnframt því að vera ein af höfuðgreinum stærðfræðinnar er hún undirstaða margra vísinda- og tæknigreina, til dæmis eðlisfræði og verkfræði, auk þess sem hún gegnir veigamiklu hlutverki í greinum eins og hagfræði, líffræði og efnafræði. Fræðin um föll af einni raunbreytu eru hornsteinn raunfallagreiningarinnar. Þau marka upphaf hennar sem og upphaf nútímastærðfræði og eiga rætur sínar að rekja til uppgötvana Newtons og Leibnitz á ofanverðri 17. öld.

Mikill fjöldi bóka, sem fjalla um föll af einni raunbreytu, hefur verið gefinn út í tæknivæddari hlutum heimsins. Hingað til hefur þó vantað ítarlegt grundvallarrit um þetta efni á íslensku. Bók þeirri, sem hér er fylgt úr hlaði, er ætlað að bæta lítillega úr því. Það er von höfunda að hún gagnist þeim sem vilja lesa sér til um þetta mikilvæga efni á íslensku.

Helstu efnisatriði bókarinnar eru sem hér segir. Í fyrsta kafla er fjallað um talnakerfin: heilar tölur, ræðar tölur, rauntölur og tvinntölur og helstu reikniaðgerðir þeirra. Hugtakið hálflína er skilgreint og af því leidd hugtökin efri og neðri mörk. Í öðrum kafla er byrjað á hugtakinu fall og síðan fjallað sérstaklega um runur og raðir. Hugtakið samleitni er fyrst kynnt með óformlegum hætti en síðan skilgreint með stærðfræðilegri nákvæmni. Þá eru helstu samleitnispróf raða leidd út. Í þriðja kafla er byrjað að ræða föll af einni raunbreytu og hugtakið samfelldni. Samfelldnihugtakið er fyrst sett óformlega fram, en síðan skilgreint nákvæmlega með svokallaðri epsilon-delta skilgreiningu. Helstu eiginleikar samfelldra falla af einni raunbreytu eru leiddir út og hornaföllum gerð skil. Í köflum fjögur og fimm er fjallað um diffrun og heildun, en þessi hugtök raunfallagreiningar eru helstu hjálpartækin í stærðfræðilegri framsetningu raunvísinda svo og í flestum öðrum fræðigreinum þar sem stærðfræði er beitt. Fjallað er um notkun diffrunar við athuganir á hegðun falla og um nálgun diffranlegra falla með margliðum. Heildi er kynnt í lok umfjöllunar um flatarmál. Sýnt er hvernig líta megi á diffrun og heildun sem andhverfar aðgerðir. Kafli sex fjallar um ýmis algeng föll svo sem lygra og veldisvísisföll. Í kafla sjö eru tengsl diffrunar og heildunar notuð til að reikna heildi nákvæmlega. Í áttunda kafla er aftur fengist við margliðunálganir diffranlegra falla og sérstaklega fjallað um föll sem unnt er að setja fram sem veldaraðir. Í níunda kafla og síðasta kafla bókarinnar er niðurstöðum úr fyrri köflum beitt við að leysa diffurjöfnur af fyrsta og öðru stigi. Fjallað er um lausnir á línulegum fyrsta stigs diffurjöfnum og á aðgreinanlegum fyrsta stigs diffurjöfnum. Þá er veldisvísisfallið af einni tvinntölubreytu skilgreint og það síðan notað til að setja fram almenna lausn á annars stigs línulegum diffurjöfnum með fastastuðlum. Bókinnni lýkur svo með umfjöllun um samband hornafallanna og veldisvísisfallsins af einni tvinntölubreytu.

Bók þessi hefur birst í nokkrum útgáfum og hafa ýmsir rétt okkur hjálparhönd við frágang þeirra. Sérstaklega viljum við geta framlags þeirra Freyju Hreinsdóttur og Gísla Mássonar sem bjuggu fyrstu útgáfu hennar til prentunar.

Reykjavík, 3. ágúst 2005.

Eggert Briem
Jón Ingólfur Magnússon

Þessi rafræna útgáfa er nokkuð breytt frá fyrri útgáfum. Í stað hinna svonefndu ϵ-δ lýsinga eru aukastafir notaðir og í lýsingu á markgildum og samfelldni er stuðst við runur.

Efnisyfirlit

Kafli 1

Talnakerfin

1.1 Smávegis rökfræði

Í þessu hefti er mikið af stærðfræðilegum sönnunum. Áður en við hefjum umfjöllun um rauntölurnar fjöllum við stuttlega um fyrirbærið sönnun.

Dæmi um stærðfræðilega setningu og sönnun hennar er eftirfarandi:

Setning *Margfeldi tveggja oddatalna er oddatala.*

Sönnun. Oddatala er tala af gerðinni $2p + 1$ þar sem p er heil tala . Látum $2p + 1$ og $2q + 1$ vera tvær oddatölur. Margfeldi þeirra er þá

$$(2p + 1)(2q + 1) = 4pq + 2p + 2q + 1 = 2(2pq + p + q) + 1$$

sen er oddatala. $\square$

Hér er vísað í skilgreiningu (á oddatölu) og reiknireglur um margfeldi og samlagningu heilla talna.. Ekki er reynt að margfalda samman allar tvær oddatölur, heldur eru teknar tvær ótilgreindar oddatölur, þær margfaldaðar saman og síðan undanskilið að niðurstaðan gildi þar með um allar tvær slíkar. Við athugum þetta nánar hér á eftir.

Stærðfræðileg setning er stærðfræðileg fullyrðing, en *fullyrðing* er setning sem er annað hvort sönn eða fölsk. Dæmi um fullyrðingar eru setningar eins og,

Ísland er eyja.
Sigmundur Davíð er forseti Íslands.

Akranes sést frá Reykjavík.
Margfeldi tveggja oddatalna er oddatala.
Tvisvar sinnum tveir eru fimm.

Sumar fullyrðinganna eru sannar aðrar ekki. Tvær síðustu eru stærðfræðilegar fullyrðingar. Dæmi um setningar sem eru ekki fullyrðingar eru setningar eins og,

Hvað er klukkan?
Farðu burt.
Það verður vont veður sama dag að ári.

Sumar setningar líta næstum því út eins og fullyrðingar,

Hann er mjög góður í handbolta.

Við getum litið á setninguna sem skara af fullyrðingum, hver um sig ákvarðast af því hver „hann" er.

Óli er mjög góður í handbolta.

Fyrri setningin er kölluð *opin yrðing*. Dæmi um fleiri slíkar eru t.d.

Hún er rector.
x *er frumtala.*
$x \cdot y$ *er oddatala.*

Hér kallast „hún" og x og y *frjálsar breytur*. Ef við setjum *Kristín Ingólfsdóttir* í fyrstu setninguna, 8 í þá næstu og 7 og 3 í þá síðustu fást fullyrðingar.

Skoðum opnu yrðinguna,

$x \cdot y$ *er oddatala.*

og berum saman við setninguna,

Ef x *og* y *eru oddatölur þá er* $x \cdot y$ *oddatala.*

(setningin sem við vorum að sanna.) Er þetta ekki opin yrðing? Nei, svo er ekki. Þetta er yrðing um **allar** tvær oddatölur eða **öll** pör af oddatölum. Þetta sjáum við betur ef við umritum setninguna,

Um öll pör x, y *af oddatölum gildir að* $x \cdot y$ *er oddatala.*

Frasarnir „um öll" eða „fyrir öll" eru dæmi um *allsherjarmagnara*, tákn $\forall$. Annar magnari er hinn svonefndi *tilvistarmagnari*, tákn $\exists$, lesið „til er" eða „til eru". Skoðum fullyrðinguna, *Ef x er heiltala þá er* $x^2 - 1 < 0$

sem líka má skrifa sem

$\forall x$, *þar sem x er heiltala, gildir að* $x^2 - 1 < 0$.

Þessi fullyrðing um allar heiltölur x er fölsk eins og $x = 2$ sýnir. Við getum líka skrifað þetta með tilvistarmagnaranum: $\exists\, x$, þar sem x er heiltala, þannig að $x^2 - 1 < 0$ stenst ekki, t.d. $x = 2$. Talan 2 er *mótdæmi* við yrðinguna eða setninguna og við höfum *afsannað* hana með mótdæmi.

Stærðfræðilegar setningar eru oft af gerðinni,

Ef P er sönn fullyrðing þá er Q líka sönn fullyrðing

Oft stytt í *ef P þá Q* eða með táknum $P \Rightarrow Q$.

Slík setning kallast *leiðing*. Leiðingin $P \Rightarrow Q$ er sönn ef P er sönn og Q er sönn, en fölsk ef P er sönn og Q fölsk.

Sönnun felst oft í því að sýna fram á sanngildi Q ef vitað er að P er sönn, að leiða Q út frá P. Setningin telst sönnuð, og þar með sönn ef það tekst.

Nú eru tveir möguleikar um Q, annað hvort er Q sönn eða þá Q er fölsk. Við getum þá líka sagt að setningin hafi verið sönnuð ef við getum útilokað að fullyrðingin Q sé fölsk þegar vitað er að P er sönn.

Til að skoða þetta nánar skoðum við *neitun* fullyrðingar. Neitun fullyrðingar R er fullyrðing, táknuð með $\neg R$, lesið *ekki R* sem er fölsk þegar R er sönn og sönn þegar R er fölsk.

Skoðum nú aftur leiðinguna $P \Rightarrow Q$ þar sem vitað er að P er sönn. Ef Q er fölsk þá er $\neg Q$ sönn. Lítum á leiðinguna $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Ef hún er sönn þá er $\neg P$ sönn, sem stenst ekki því gefið er að P er sönn. Þess vegna getur $\neg Q$ ekki verið sönn, þ.e.a..s. Q hlýtur að vera sönn. Þessi sönnunaraðferð kallast *óbein sönnun.* Lítum á dæmi.

Setning *Ef 3 gengur ekki upp í x^2 þá gengur 3 ekki upp í x.*

Sönnun. Við fyrstu sýn virðist hér um opna yrðingu að ræða, en með umorðun sést að svo er ekki:

Um allar heilar tölur x þannig að 3 gengur ekki upp x^2 gildir að 3 gengur ekki upp í x.

Sönnun. Þessi setningu má sanna með því að nota þáttun náttúrulegra talna í frumtölur. Prófum hins vegar að nota óbeina sönnun. Þá göngum við út frá því að 3 gangi upp í x. Þá er til tala k þannig að $3 \cdot k = x$. En þá er $x^2 = (3 \cdot k)(3 \cdot k) = 3^2 \cdot k^2$ sem stenst ekki.

Skoðum aðra niðurstöðu.

Setning *Frumtölurnar eru óendanlega margar.*

Sönnun. Neitun þessarar fullyrðingar er fullyrðingin, *frumtölurnar eru ekki óendanlega margar.* Þær eru því endanlega margar. Margföldum þær saman og leggjum 1 við. Köllum útkomuna q. Talan q er stærri en allar frumtölurnar og er því ekki frumtala. Þar með gengur a.m.k. ein frumtala upp í q. Sú frumtala gengur líka upp í margfeldi allra frumtalnanna og þar með upp í mismun q og margfeldis frumtalnanna. En sá mismunur er 1. Út frá forsendunni að frumtölurnar séu endanlega margar getum við ályktað að til sé frumtala sem gengur upp í 1. Forsendan hlytur því að vera fölsk. □

Algengar *samsettar* yrðingar eru yrðingarnar P *eða* Q, táknað $P \vee Q$ og P *og* Q táknað $P \wedge Q$. Yrðingin $P \vee Q$ er sönn ef önnur hvor eða báðar yrðingarnar P og Q eru sannar, annars fölsk. Við getum líka orðað þetta þannig: Yrðingin $P \vee Q$ er sönn nema bæði P og Q séu falskar. Við segjum að yrðingin $P \wedge Q$ sé sönn ef bæði P og Q eru sannar, annars fölsk, þ.e.a.s. $P \wedge Q$ er fölsk nema bæði P og Q séu sannar.

Þegar leiða á út yrðingu af gerðinni $P \vee Q$ þá þarf að útiloka að báðar séu falskar. Aðferðin er oftast sú að sýna fram á að ef önnur er fölsk þá er hin sönn.

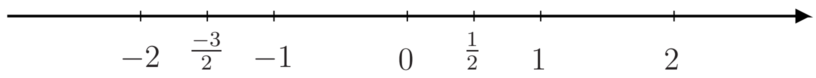
Setning Ef x er heiltala og $x^2 > 4$ þá er $x > 2$ eða $x < -2$.

Hér getum við byrjað á að ganga út frá að $x > 2$ gildi ekki og draga síðan þá ályktun að $x < -2$.

Flestar þær sannanir sem koma fyrir í þessu hefti eru af einhverri þeirra gerða sem fjallað var um hér að framan.

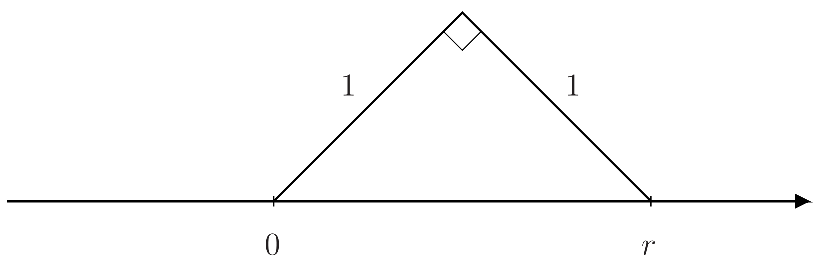
1.2 Rauntölur

Snúum okkur nú að tölunum. *Ræðu tölurnar* látum við samsvara punktum á talnalínunni, en talnalínan fæst með því að draga línu, merkja einn punkt hennar með 0 og annan punkt til hægri við 0 með 1. Síðan eru heilu tölurnar og brotin merkt inn á línuna á venjulegan hátt. (Sjá mynd (1.1)). Ólík brot geta gefið sama punktinn á talnalínunni, þ.e. sömu ræðu töluna,



Mynd 1.1: Talnalínan

t.d. 2/4 og 3/6. Ræðu tölunum er *raðað* eftir staðsetningu á línunnni. Eins og við höfum lýst talnalínunni þá liggur sérhver punktur á línunni milli tveggja samliggjandi heilla talna. Þetta gildir sér í lagi um punkta sem samsvara ræðum tölum. Það finnast aðrir punktar á talnalínunni en þeir sem samsvara ræðum tölum. Leggjum talnalínuna í rétthyrnt hnitakerfi og drögum rétthyrndan jafnhliða þríhyrning með skammhliðar 1 og langhliðina á línunni með vinstra endapunkt í 0. Þá er hægri endapunktur í $\sqrt{2}$. (sjá mynd (1.2)). Punktana á talnalínunni köllum við *rauntölur*. Ræðu tölurnar eru þá rauntölur en ekki eru allar rauntölur ræðar. Rauntölunum er eins og ræðu tölunum raðað eftir staðsetningu á línunni.



Mynd 1.2:

Allar rauntölur má setja fram sem *tugabrot*. Látum t vera punkt hægra megin við 0 á talnalínunni. Veljum heila tölu k þannig að

$$k \leq t < k + 1.$$

Skiptum bilinu

$$[k, k + 1]$$

í 10 jafnlöng bil (af lengd 10^{-1}) og veljum a_1 meðal talnanna frá 0 upp í 9 þ.a.

$$k + a_1 10^{-1} \leq t < k + (a_1 + 1)10^{-1}.$$

Næst skiptum við bilinu

$$[k + a_1 10^{-1}, k + (a_1 + 1)10^{-1}]$$

í 10 jafnlöng bil (af lengd 10^{-2}) og veljum a_2 meðal talnanna frá 0 upp í 9 þannig að

$$k + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} \leq t < k + a_1 10^{-1} + (a_2 + 1)10^{-2}.$$

Þá skiptum við bilinu

$$[k + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2}, k + a_1 10^{-1} + (a_2 + 1)10^{-2}]$$

í 10 jafnlöng bil (af lengd 10^{-3}) og veljum a_3 meðal talnanna frá 0 upp í 9 þannig að

$$k + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + a_3 10^{-3} \leq t < k + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + (a_3 + 1)10^{-3},$$

og þannig fram eftir götunum. *Heiltöluhluti* rauntölunnar t er þá talan k og $aukastafir$ tölunnar t eru tölurnar $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Við skrifum

$$t = k, a_1 a_2 a_3 \cdots ,$$

og segjum að rauntalan t hafi verið sett fram eða skrifuð sem tugabrot. Ef $t < 0$ þá skrifum við

$$t = -k, a_1 a_2 a_3 \cdots$$

þar sem $-t = k, a_1 a_2 a_3 \cdots$.

Tugabrot er stærð of sömu gerð og stærðin $k, a_1 a_2 a_3 \cdots$ hér að ofan. Um tugabrot gildir eftirfarandi meginsetning sem við lítum á sem forsendu.

Frumsetning. *Með aðgerðinni hér að ofan sem ákvarðar tugabrot punkts fást öll tugabrot nema þau sem enda á eintómum 9-um, og ólíkir punktar gefa ólík tugabrot.*

Setningin segir að við getum samsvarað punktana á talnalínunni, þ.e. rauntölurnar, við tugabrot, ef tugabrot sem enda á eintómum 9-um eru hækkuð upp.

Við notum $\mathbb{R}$ til að tákna mengi rauntalna.

Ein afleiðing af frumsetningunni er eftirfarandi niðurstaða sem við þurfum á að halda síðar.

Setning 1.2.1. *Lát x vera rauntölu. Gerum ráð fyrir að $x > 0$ þ.e. að x liggi hægra megin við 0 á talnalínunni. Þá má finna náttúrulega tölu k þannig að $10^{-k} < x$.*

Sönnun. Ef engin slík tala k er til þá eru allir aukastafir x jafnir 0 svo að x og 0 hafa sama tugabrotið. En þá er $x = 0$ samkvæmt frumsetningunni sem er mótsögn. □

Tugabrot ræðrar tölu fæst með því að taka brot sem ákvarðar ræðu töluna og deila nefnara í teljara,

$$7/16 = 0,4375 \quad 5/3 = 0,666\cdots \quad 821/1100 = 0,47636363.$$

Fyrsta tugabrotið er sagt vera *endanlegt*, en tvö seinni eru kölluð *umferðartugabrot.* Það fyrra hefur umferðina 6 og umferðin byrjar frá og með fyrsta aukastaf. Það síðara hefur umferðina 63 og hún byrjar frá og með þriðja aukastaf. Ef umferðin er 9 þá hækkum við upp t.d þá er

$$1,2999\cdots = 1,3.$$

Setning 1.2.2. *Rauntala er ræð ef og aðeins ef tugabrot hennar er endanlegt eða er umferðartugabrot*

Dæmi 1.2.3. Eins og við lýsum því hvernig aukastafir eru ákvarðaðir þá gildir um tvær tölur sem hafa sama heiltöluhluta og sömu sjö fyrstu aukastafi að þær liggja á hálfopnu bili af lengd 10^{-7}. Mismunur þeirra er því í tölugildi minni en 10^{-7}. Einnig gildir að ef mismunur tveggja rauntalna er í tölugildi minn en 10^{-7} þá eru 6 fyrstu aukastafir þeirra þeir sömu ef hækkað er upp þegar 7-undi aukastafur er 9. Sér í lagi gildir að ef t er rauntala og t_7 er talan sem fæst þegar allir aukastafir nema 7 fyrstu eru skornir af t þá eru 7 fyrstu aukastafir t_7 og t eins. Þar sem aukastafir t_7 eru 0 nema 7 fyrstu eru 7 fyrstu aukastafir $t - t_7$ allir 0 svo að $|t - t_7| < 10^{-7}$. Tilsvarandi niðurstaða fæst fyrir fleiri eða færri aukastafi.

Reikniaðgerðir og reiknireglur sem gilda í ræðu tölunum gilda líka í rauntölunum. En hvernig reiknum við í $\mathbb{R}$? Að ákvarða summu tveggja rauntalna $s + t$ er það sama og að ákvarða aukastafi summunnar. Þannig þurfum við t.d. að geta ákvarðað 7 fyrstu aukastafi $s + t$ ef við þekkjum nógu marga aukastafi s og t. Um þetta fjallar næsta dæmi.

Dæmi 1.2.4. Hvernig á að reikna með rauntölum sem eru ekki ræðar? Spurninguna ætti frekar að orða þannig: Ef við beitum reikniaðgerð, t.d. samlagningu, á rauntalnaparið s, t, hve marga aukastafi þurfum við að þekkja í s og t til að fá k rétta aukastafi í $s + t$? Hér er k fyrirfram gefin náttúruleg tala.

Lát s og t vera rauntölur og s_7 og t_7 vera tölurnar sem fást þegar allir aukastafir nema 7 fyrstu hafa verið skornir af. Athugum hve $s_7 + t_7$ gefur marga rétta aukastafi í $s + t$.

$$|s + t - (s_7 + t_7)| = |(s - s_7) + (t - t_7)| \leq 10^{-7} + 10^{-7} < 2 \cdot 10^7 < 10^{-6},$$

og þar með er $s_7 + t_7$ eins og $s - t$ að 5 aukastöfum.

Skoðum næst $s \cdot t$ þar sem $|s| < 10^3$ og $|t| < 10^3$. Nú er

$$s \cdot t - s_8 \cdot t_8 = s \cdot (t - t_8) + t_8 \cdot (s - s_8)$$

svo að

$$|s \cdot t - s_8 \cdot t_8| \leq |s| \cdot |t - t_8| + |t_8| \cdot |(s - s_8| \leq\leq 2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8} < 10^{-4},$$

svo að 3 fyrstu aukastafir í $s_8 \cdot t_8$ eru eins og 3 fyrstu aukastafir í $s \cdot t$.

Skoðum að lokum $1/t_7$ þar sem $t > 1$. Nú gildir

$$|\frac{1}{t} - \frac{1}{t_7}| = |\frac{t_7 - t}{t_7 t}| < |t_7 - t| < 10^{-7}.$$

Þar með eru 6 fyrstu aukastafir t_7 og t þeir sömu. En t_7 er ræð tala svo að auðvelt er að reikna 6 fyrstu aukastafi $1/t_7$.

Setning 1.2.5. (i) *$s_k + t_k$ gefur $s + t$ með með $k - 2$ réttum aukastöfum.*

(ii) *$s_k \cdot t_k$ gefur $s \cdot t$ með $k - (l + 2)$ réttum aukastöfum ef $|s_k| < 10^l$ og $|t_k| < 10^l$.*

Um sönnun, sjá verkefni 18 í verkefnakaflanum.

Eins og áður sagði er rauntölunum raðað eftir staðsetningu á talnalínunni. Ef við skoðum hvernig aukastafir eru skilgreindir þá sjáum við að $x < y$ jafngildir því að annaðhvort er heiltöluhluti x minni en heiltöluhluti y eða þá að til er náttúruleg tala n þannig að fyrstu n aukastafir x og y eru eins og n-ti aukastafur x er minni en n-ti aukastafur y. Þetta gefur tilefni til eftirfarandi skilgreiningar.

Skilgreining 1.2.6. Við segjum að tvær rauntölur *séu eins að k-ta aukastaf* ef þær hafa sama heiltöluhluta og sömu fyrstu k aukastafi. Ef $(k+1)$-sti aukastafur í annari tölunni er 9 hækkum við upp áður en aukastafir eru bornir saman.

Samkvæmt skilgreiningunni eru $1,10001$ og $1,09993$ eins að 3. aukastaf og $0,999$ er eins og $1,009$ að 1-sta aukastaf. Eftirfarandi niðurstöðu úr Dæmi 1.1.4 setjum við fram sem setningu.

Setning 1.2.7. *Ef k er náttúruleg tala og x og y eru eins að k-ta aukastaf þá er $|x-y| < 10^{-k}$ og ef $|x-y| < 10^{-(k+1)}$ þá eru x og y eins að k-ta aukastaf.*

Röðunin gefur tilefni til fleiri skilgreininga.

Skilgreining 1.2.8. Ekki tómt hlutmengi A af $\mathbb{R}$ hefur *stærsta stak* ef til er a í A þannig að $x < a$ fyrir öll önnur stök x í A. Ekki tómt hlutmengi A af $\mathbb{R}$ er sagt *takmarkað að ofan* ef til er rauntala t þannig að $x \leq t$ gildir um öll x í A. Slík tala t kallast *yfirtala* fyrir A. Tilsvarandi lýsing er gefin á minnsta staki, því að mengi sé takmarkað að neðan og undirtölu

Athugasemd. Mengi sem er takmarkað að ofan þarf ekki að hafa stærsta stak, en ef mengi hefur stærsta stak þá er það yfirtala fyrir mengið og jafnframt minnsta yfirtalan. Sannreynið þessar fullyrðingar.

Setning 1.2.9. *Sérhvert ekki tómt hlutmengi A af $\mathbb{R}$ sem er takmarkað að ofan á sér minnstu yfirtölu. Talan kallast efri mörk A og tákn hennar er* $\sup A$. *Þ.e.a.s., til er tala,* $\sup A$, *sem er yfirtala fyrir A og sem um gildir að engin rauntala, minni en* $\sup A$, *er yfirtala fyrir A.*

Sönnun. Gerum fyrst ráð fyrir að A innihaldi stök stærri en eða jöfn 0. Ef A hefur stærsta stak er það jafnt $\sup A$. Sér í lagi gildir þetta ef A er endanlegt.

Annars veljum við stærstu tölu k meðal heiltöluhluta stakanna í A. Ef mengi þeirra staka í A sem hafa heiltöluhluta k er endanlegt þá er stærsta stak þess mengis jafnframt stærsta stak A. Annars veljum við stærsta 1. aukastaf, a_1, stakanna í A með heiltöluhluta k. Aftur er sönnun lokið ef mengi slíkra staka er endanlegt. Annars veljum við stærsta 2. aukastaf, a_2, stakanna í A með heiltöluhluta k og 1. aukastaf a_1, og þannig koll af kolli.

Rauntalan $t = k, a_1 a_2 a_3 \cdots$ er þá $\sup A$ □

Athugasemd. Samkvæmt setningunni er engin minni tala en $\sup A$ yfirtala fyrir A sem þýðir að ef k er einhver náttúruleg tala þá er til stak a í A þannig að $a > \sup A - 10^{-k}$

Ef öll stök í A eru minni en 0 þá breytum við „stærsta“ í „minnsta“ við val á aukastöfunum a_n.

Næsta setning er hliðstæða við setninguna að ofan.

Setning 1.2.10. *Sérhvert ekki tómt hlutmengi B af $\mathbb{R}$ sem er takmarkað að neðan á sér stærstu undirtölu. Talan kallast neðri mörk B og tákn hennar er* $\inf B$*. Þ.e.a.s. til er tala,* $\inf B$*, sem er undirtala fyrir B og sem um gildir að engin stærri tala er undirtala fyrir B.*

Sönnun. Notið Setningu 3 á mengið $A = -B$, þar sem $-B = \{\, -b \,:\, b \in B \,\}$. □

Setningarnar hér á undan eru ein birtingarmynd á því sem kallast *fullkomleiki* rauntalnanna $\mathbb{R}$. Þær gilda almennt ekki í $\mathbb{Q}$ eins og næsta dæmi sýnir.

Dæmi 1.2.11. Lát

$$A = \{\, s \in \mathbb{R} \,:\, s^2 \leq 2\}$$

og lát $t = \sup A$. Þá er $t^2 = 2$. Til að sjá að þetta sé rétt skulum við útiloka tilfellin $t^2 < 2$ og $t^2 > 2$. Skoðum fyrra tilfellið. Látum u vera rauntölu milli 0 og 1. Þá gildir

$$(t+u)^2 = t^2 + 2tu + u^2 < t^2 + 4u + u = t^2 + 5u < 2,$$

ef $u < (2 - t^2)/5$ v.þ.a. $u < 1$ og $t < 2$. Með slíku vali á u er $t + u$ í A sem stenst ekki því $t = \sup A$. Á svipaðan hátt útilokum við tilfellið $t^2 > 2$. Eini möguleikinn er því $t^2 = 2$.

Lát nú

$$B = \{\, s \in \mathbb{Q} \,:\, s^2 \leq 2\}.$$

Þá hefur B ekki minnstu yfirtölu í $\mathbb{Q}$. Útreikningarnir hér að ofan, þar sem t er látin vera ræð, sýna nefnilega að um slíka minnstu yfirtölu r yrði að gilda að $r^2 = 2$.

Skilgreining 1.2.12. Lát a og b vera rauntölur og $a < b$. Mengið

$$\{\, t \in \mathbb{R} \,:\, a < t < b \,\}$$

er takmarkað *opið bil* með endapunkta a og b, táknað (a, b). Mengið

$$\{\, t \in \mathbb{R} \,:\, a < t \,\}$$

kallast *opin hægri hálflína* með endapunkt a, táknað (a, ∞). Þegar endapunktar bætast við eru bilin og hálflínurnar sagðar lokaðar.

Setning 1.2.13. *Sérhvert bil inniheldur ræða tölu.*

Sönnun. Skoðum dæmið $a = 1,1235\cdots$ og $b = 1,1236\cdots$. Látum r vera ræðu töluna $r = 1,1236$. Almennt förum við að fyrsta aukastaf í b sem er stærri en samsvarandi aukastafur í a. $\square$

Að lokum örfá orð um óræðu tölurnar þ.e.a.s. tölur sem eru ekki ræðar. Um þær gildir að sérhvert opið bil inniheldur að minnsta kosti eina óræða tölu. Þetta má sjá á eftirfarandi hátt: Látum (a,b) vera opið bil. Veljum ræða tölu $r \neq 0$ þannig, að $r \in (a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$. Þá er $r\sqrt{2} \in (a,b)$ og $r\sqrt{2}$ er óræð.

Samkvæmt þessu er „mikið“ af óræðum tölum og þær eru í vissum skilningi miklu fleiri en ræðu tölurnar, við munum þó ekki ræða þá hluti hér.

Verkefni 1.2

1 Látum p vera frumtölu og r rauntölu þannig að $r^2 = p$. Sýnið að r sé óræð tala.

Í dæmum 2-17 tákna a og b ræðar tölur en α og β óræðar tölur. Í hverju dæmi fyrir sig skal segja til um hvort viðkomandi tala er ræð eða óræð eða gera grein fyrir að ekki sé unnt að segja til um það.

2 $a+b$

3 $a-b$

4 ab

5 $\frac{1}{b}$

6 $\frac{a}{b}$

7 $\sqrt{a}$

8 $\alpha + a$

9 $\alpha - a$

10 $a\alpha$

11 $\frac{\alpha}{a}$

12 $\frac{a}{\beta}$

13 $\sqrt{\alpha}$

14 $\alpha + \beta$

15 $\alpha - \beta$

16 $\alpha\beta$

17 β^n, þar sem $n \in \mathbb{N}$

18 Sannið setninguna um hvernig finna skal fjölda réttra aukastafa í summu og margfeldi.

19 Við skilgreinum tölugildistáknið, $|\cdot|$, með því að setja $|x| = x$ ef $x \geq 0$ en $|x| = -x$ ef $x < 0$.

(a) Sýnið að $-|a| \leq a \leq |a|$.

(b) Sýnið að $|a| < b$ sé jafngilt $-b < a < b$.

(c) Sýnið að $|ab| = |a||b|$.

(d) Sýnið að $|a + b| \leq |a| + |b|$.

20 Finnið allar rauntölur x sem fullnægja ójöfnunni

$$\frac{|1 - |x||}{1 + 1/x} \geq 1.$$

Í dæmum 20-23 skal finna $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ og $\min A$, ef til eru.

21 $A = \left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} : p, q, r \in \mathbb{N}\right\}$

23 $A = \left\{\frac{pqr}{p+q+r} : p, q, r \in \mathbb{N}\right\}$

22 $A = \left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} : p, q, r \in \mathbb{N}\right\}$

24 $A = \left\{\frac{1}{k} + \frac{(-1)^n}{n} : k, n \in \mathbb{N},\ k \neq n\right\}$

25 Sýnið að til sé nákvæmlega ein jákvæð rauntala sem uppfyllir jöfnuna $x^2 = 2$.

26 Látum $a_1, \ldots, a_n$ og $b_1, \ldots, b_n$ vera rauntölur. Sýnið að

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2).$$

Gerum nú ráð fyrir að tölurnar $a_1, \ldots, a_n$ séu ekki allar núll. Sýnið að þá gildi jafnaðarmerkið ef og aðeins ef til sé rauntala t sem uppfyllir

$$b_1 = ta_1, \ldots, b_n = ta_n$$

[Ábending: Skoðið margliðuna $F(t) = (ta_1 + b_1)^2 + \cdots + (ta_n + b_n)^2$.]

Þessi ójafna er oftast sett fram á forminu

$$|a_1b_1 + \cdots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$$

og kölluð **Cauchy-Schwarz-ójafna**.

1.3 Tvinntölur

Jafnan $x^2 + 1 = 0$ hefur enga lausn, nánar til tekið hefur hún enga rauntölulausn. Til þess að leysa jöfnuna þurfum við að innleiða nýjar tölur svipað og þegar mengi ræðra talna var stækkað til þess að unnt væri að leysa jöfnur á borð við $x^2 = 2$.

Á 16. öld var táknið $\sqrt{-1}$ innleitt sem „lausn“ á jöfnunni $x^2+1 = 0$. Síðar var farið að tákna lausnina með i og var litið á hana sem „ímyndaða“ tölu, sem hægt væri að meðhöndla í útreikningum eins og hverja aðra rauntölu nema hvað kvaðrat hennar væri -1. „Tölur“ eins og $3+4i$, almennt $a + ib$ með $a, b \in \mathbb{R}$, kallaðar *tvinntölur*, voru innleiddar og það var reiknað formlega með þessum tölum um langan tíma. Til dæmis þá voru tvinntölur lagðar saman á eftirfarandi hátt:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{1}$$

og margfaldaðar saman þannig:

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).\end{aligned} \tag{2}$$

Núna var hægt að draga út kvaðratrót af neikvæðri tölu: ef $D < 0$ þá er $\sqrt{D} = \pm i\sqrt{-D}$ t.d. þá er $\sqrt{-4} = \pm i2 (= \pm 2i)$.

Tvinntölurnar voru þó ekki eins „áþreifanlegar“ og rauntölurnar; það vantaði haldgóða skilgreiningu á tvinntölunum. Eins og sagt var hér að framan þá má líta á rauntölurnar sem punkta á talnalínu. Í lok 18. aldar innleiddi Norðmaðurinn Caspar Wessel (1745–1818) tvinntölurnar á geómetriskan hátt og snemma á 19. öld innleiddu Karl Friedrich Gauss (1777–1855) og William Rowan Hamilton (1805–1865) tvinntölurnar á aritmetískan hátt. Hugmynd þeirra síðastnefndu var sú að eðlilegt væri að líta á tvinntölurnar sem punkta í plani með rétthyrndu hnitakerfi.

Látum $\mathbb{R}^2$ tákna mengi allra raðaðra para af rauntölum,

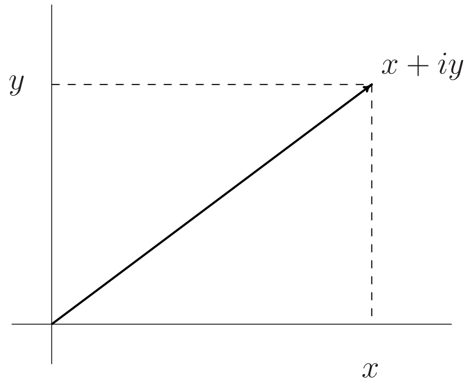
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

(Það að við tölum um röðuð pör þýðir, að við gerum greinarmun á parinu (x, y) og (y, x).)

Við skilgreinum nú *tvinntölurnar* sem mengið $\mathbb{R}^2$, og í stað þess að skrifa (x, y) skrifum við $x + iy$ þ.e.a.s. við setjum

$$x + iy = (x, y).$$

og við notum táknið $\mathbb{C}$ fyrir mengi tvinntalna. Tölurnar á x-ásnum eru þá rauntölurnar en tölurnar á y-ásnum eru hinar svo kölluðu *þvertölur*. Ef $z = x+iy$ er tvinntala þá köllum við x *raunhluta* z og notum táknið $\operatorname{Re} z$fyrir hann, en y *þverhluta* og táknum hann með $\operatorname{Im} z$.



Mynd 1.3: Tvinntölur

Reiknireglur fyrir tvinntölurnar

Formlega viljum við geta reiknað með tvinntölum eins og um rauntölur sé að ræða þ.e.a.s. eins og í (1) og (2) hér að framan.

Við skilgreinum því samlagningu og margföldum tvinntalna á eftirfarandi hátt:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Ef $z = x + iy$ er tvinntala þá skilgreinum við ennfremur $-z$ og $\frac{1}{z}$ sem

$$-z = -x + i(-y)$$
$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} \qquad \text{ef } z \neq 0.$$

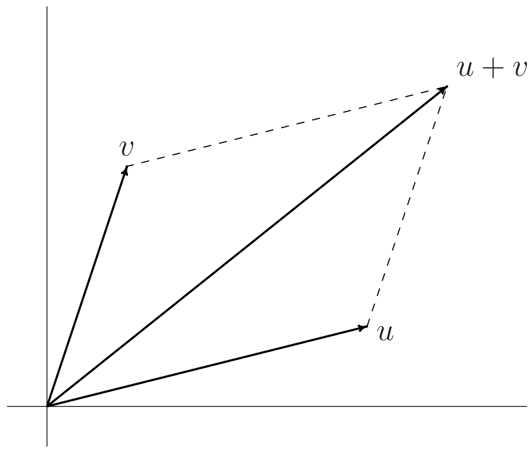
Þar með getum við skilgreint frádrátt og deilingu í menginu $\mathbb{C}$:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \qquad \text{ef } z_2 \neq 0.$$

Með því að nota tilsvarandi reglur fyrir rauntölurnar getum við auðveldlega sannfært okkur um það, að eftirfarandi reglur gilda:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 & z_1 z_2 &= z_2 z_1 \\ (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3) & (z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3) \\ z_1(z_2 + z_3) &= z_1 z_2 + z_1 z_3 & z \cdot 1 &= z \\ z + 0 &= z & z \cdot 0 &= 0 \\ z + (-z) = z - z &= 0 & z \cdot \frac{1}{z} &= \frac{z}{z} = 1 \quad (z \neq 0). \end{aligned}$$

Samlagningu tvinntalna er auðvelt að túlka rúmfræðilega, hér er um að ræða samlagningu vektora í $\mathbb{R}^2$ (sbr. mynd 1.4). Það er dálítið flóknara að túlka



Mynd 1.4: Samlagning tvinntalna

margföldun rúmfræðilega. Látum *lengd* z, táknað $|z|$ vera lengd vektorsins z þ.e.a.s.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{ef } z = x + iy$$

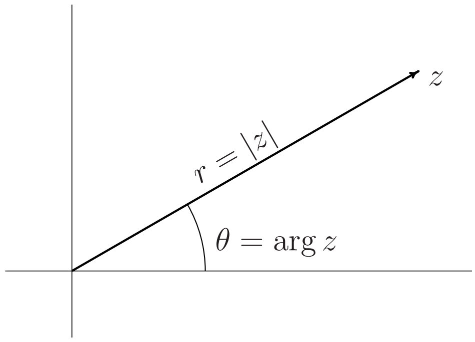
og látum *stefnuhorn* fyrir z táknað, $\arg z$,

vera hornið, sem z myndar við x-ás, reiknað rangsælis. Látum ennfremur $\arg 0 = 0$; þá er $\arg z$ tala á bilinu $[0, 2\pi)$ og ef $\theta = \arg z$ þá ákvarðast θ af jöfnunum

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Athugið, að jákvæðu rauntölurnar hafa stefnuhorn 0 en neikvæðu rauntöl-



Mynd 1.5: Skauthnit

urnar stefnuhorn π. Við sjáum nú, að ef $z = x + iy$ er tvinntala og ef θ og r eru stefnuhorn og lengd z þá má rita z á forminu

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Látum nú $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ og $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ og vera tvinntölur og margföldum þær saman:

$$z_2 z_1 = r_2 r_1(\cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta_1 + i(\sin\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\sin\theta_1)).$$

Nú gildir samkvæmt samlagningarformúlunum fyrir sínus og kósínus föllin, að

$$\sin(\theta_2 + \theta_1) = \sin\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\sin\theta_1$$
$$\cos(\theta_2 + \theta_1) = \cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta_1$$

svo að

$$z_2 z_1 = r_2 r_1(\cos(\theta_2 + \theta_1) + i\sin(\theta_2 + \theta_1)),$$

Með öðrum orðum *við margföldum tvær tvinntölur saman með því að margfalda lengdirnar saman og leggja saman hornin sem þær mynda við x-ásinn* (athugið, að $\arg z_2 z_1 = \theta_2 + \theta_1 - 2\pi$ ef $\theta_2 + \theta_1 \geq 2\pi$).

Látum $z \in \mathbb{C}$ vera tvinntölu, látum $r = |z|$ og $\theta = \arg z$ þannig að

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Parið (r, θ) kallast *skauthnit* tvinntölunnar z. Við getum líka skrifað z á forminu

$$z = x + iy.$$

Parið (x, y) kallast *kartesísku hnit* z (eftir Rene Descartes (1596-1650), sem fann rétthyrnda hnitakerfið upp). Eins og við sáum hér að framan þá er samlagning tvinntalna einföld í kartesískum hnitum en margföldun í skauthnitum.

Hér að framan skilgreindum við lengd tvinntölu $z = x + iy$ sem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Um lengd gilda eftirfarandi reglur:

$$\begin{aligned} |z| &= |-z| \\ |zz_1| &= |z| \cdot |z_1|. \end{aligned}$$

(þessa reglu uppgötvuðum við þegar við vorum að ræða rúmfræðilega túlkun á margföldun tvinntalna). Ef $z_1 \neq 0$ þá getum við skrifað $z = z_1 \frac{z}{z_1}$ svo að

$$\left| \frac{z}{z_1} \right| = \frac{|z|}{|z_1|} \qquad \text{ef } z_1 \neq 0.$$

Út úr skilgreiningunni á $|z|$ fæst strax, að

$$\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

og að

$$\operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$$

Ef $z = x + iy$ er tvinntala þá skilgreinum við *samoka* (e. conjugate) tvinntöluna við z, táknaða með $\overline{z}$ sem töluna

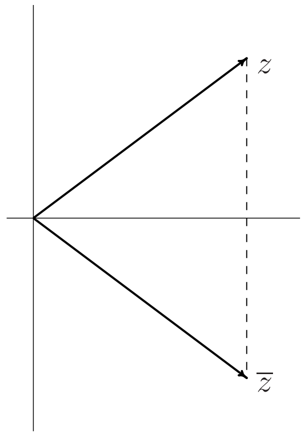
$$\overline{z} = x - iy.$$

Rúmfræðilega túlkunin á samokun er speglun í x-ás. Með útreikningum er auðvelt að sýna fram á að eftirfarandi reglur gilda um samokun:

$$\overline{z + z_1} = \overline{z} + \overline{z_1}, \quad \overline{zz_1} = \overline{z} \cdot \overline{z_1} \quad \text{og} \quad \overline{\overline{z}} = z.$$

Þar sem

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 \quad \text{ef} \quad z = x + iy$$



Mynd 1.6: Samokun

þá er

$$|\overline{z}| = |z| = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Við skulum nú leiða út hina svokölluðu *þríhyrningsójöfnu*:

$$|z + z_1| \leq |z| + |z_1|. \tag{3}$$

$$\begin{aligned} |z + z_1|^2 &= (z + z_1)\overline{(z + z_1)} \\ &= z\overline{z} + z_1\overline{z} + z\overline{z_1} + z_1\overline{z_1} \\ &= |z|^2 + |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{z_1}) \leq |z|^2 + |z_1|^2 + 2\,|zz_1| \\ &= |z|^2 + |z_1|^2 + 2\,|z|\,|z_1| \\ &= (|z| + |z_1|)^2. \end{aligned}$$

Hér höfum við notað, að $z_1\overline{z}+z\overline{z_1} = z_1\overline{z}+\overline{z_1\overline{z}} = 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z})$ því að um tvinntölu u gildir almennt, að $u + \overline{u} = 2\,\mathrm{Re}\,u$.

Samkvæmt þríhyrningsójöfnunni þá er

$$|z| = |z - z_1 + z_1| \leq |z - z_1| + |z_1|$$

svo að

$$|z| - |z_1| \leq |z - z_1|.$$

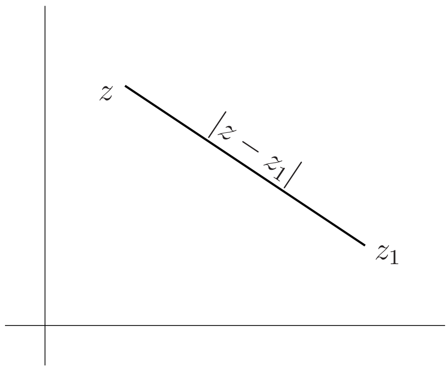
Með því að skipta á z og z_1 fæst:

$$|z_1| - |z| \leq |z_1 - z| = |z - z_1|$$

svo að

$$||z| - |z_1|| \leq |z - z_1| . \tag{4}$$

Athugið að þríhyrningsójöfnurnar (3) og (4) gilda að sjálfsögðu sérstaklega fyrir rauntölur. Við skulum nú líta á rúmfræðilega túlkun þríhyrningsójafnanna. Ef z og z_1 eru tvinntölur þá skilgreinum við *fjarlægðina frá z til z_1* sem töluna $|z - z_1|$. Þar sem $|z - z_1| = |z_1 - z|$ þá tölum við yfirleitt um *fjarlægðina milli* z og z_1, sem er lengdin á línustrikinu milli z og z_1.



Mynd 1.7: Fjarlægð milli tvinntalna

Athugið, að samkvæmt þríhyrningsójöfnunni þá gildir, að

$$\begin{aligned} |z_1 - z_3| &= |(z_1 - z_2) + (z_2 - z_3)| \\ &\leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| \end{aligned}$$

þ.e.a.s. lengd hverrar hliðar í þríhyrningi er minni eða jöfn summunni af lengdum hinna tveggja; þess vegna heitir ójafnan í (3) þríhyrningsójafna. Hvað varðar (4) þá sjáum við að ef við tökum þríhyrning og flytjum hann til þannig, að hornpunktarnir lendi í 0, z og z_1 þá segir (4) að mismunur lengda tveggja hliða í þríhyrningi er minni eða jafn lengd þeirrar þriðju.

Dæmi 1.3.1. Látum $n \in \mathbb{N}$ og lítum á jöfnuna

$$z^n = 1.$$

Við skulum reyna að finna allar tvinntölur sem uppfylla þessa jöfnu. Gerum ráð fyrir því, að z sé lausn á jöfnunni. Þá hlýtur sérstaklega að gilda

$$1 = |z^n| = |z|^n$$

og þar sem $|z|$ er jákvæð rauntala sjáum við, að

$$|z| = 1.$$

Nú verður líka að gilda að

$$\arg z^n = \arg 1 = 0.$$

Með því að nota regluna um stefnuhorn af margfeldi tveggja tvinntalna $n-1$ sinni fæst, að mismunurinn á $\arg z^n$ og $n \cdot \arg z$ er heilt margfeldi af 2π, og þar sem $\arg z^n = 0$ þá verður

$$n \cdot \arg z = p \cdot 2\pi \qquad \text{þar sem } p \in \mathbb{Z}.$$

svo að

$$\arg z = \frac{p \cdot 2\pi}{n} \qquad \text{þar sem } p \in \mathbb{Z}.$$

Þar sem við krefjumst þess, að $\arg z \in [0, 2\pi)$ þá sjáum við að p verður að vera einhver talnanna $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Öfugt, ef p er ein þessara talna og ef $\theta = \frac{p}{n} 2\pi$ þá gildir um

$$z = \cos\theta + i \sin\theta$$

að

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta = 1.$$

Lausnirnar á jöfnunni eru því n að tölu:

$$z = \cos\theta + i \sin\theta$$

þar sem θ er einhver talnanna

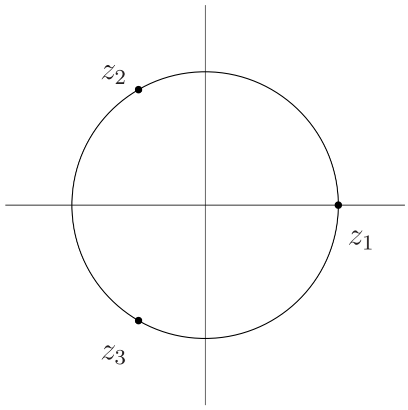
$$0, \frac{1}{n}2\pi, \frac{2}{n}2\pi, \ldots, \frac{n-1}{n}2\pi.$$

Á mynd (1.8) sjást lausnirnar á jöfnunni $z^3 = 1$. Þær eru

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dæmi 1.3.2 (Annars stigs jafnan)**.** Látum a, b og c vera gefnar rauntölur og lítum á jöfnuna

$$ax^2 + bx + c = 0.$$



Mynd 1.8: Lausnir jöfnunnar $z^3 = 1$

Talan $D = b^2 - 4ac$ kallast *aðskilja* jöfnunnar. Eins og þekkt er hefur hún þann eiginleika að $D \geq 0$ hefur í för með sér að jafnan hefur rauntölulausnirnar

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

en $D < 0$ hefur í för með sér að jafnan hefur enga rauntölulausn.

Margliða í tvinntölunum er fall $P(z)$ á forminu

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

þar sem *stuðlarnir* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ eru gefnar tvinntölur, $a_n \neq 0$ og *breytan* z getur tekið hvaða tvinntölugildi sem er. Talan n kallast *stig* margliðunnar. Tvinntala z_0 er sögð vera *rót* eða *núllstöð* margliðunnar $P(z)$ ef $P(z_0) = 0$. Sumar margliður hafa engar rauntölurætur (jafnvel þótt allir stuðlarnir séu rauntölur) t.d. margliðan $P(z) = z^4 + 1$. Hinsvegar hefur sérhver margliða af stigi ≥ 1 að minnsta kosti eina tvinntölurót. Þessa fullyrðingu, sem kallast *meginsetning algebrunnar* munum við ekki sanna hér, heldur taka hana trúanlega. Með því að beita þessari setningu getum við sýnt fram á það, að til sérhverrar margliðu $P(z)$ af stigi n svara n tvinntölur $z_1, \ldots, z_n$ (sumar geta verið eins) þannig að

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n). \tag{5}$$

Til þess að sanna þetta notfærum við okkur, að ef z_1 er rót í $P(z)$ og ef $z - z_1$ er deilt upp í $P(z)$ þá fæst sem leif tvinntala a; ef $P(z) = (z - z_1)Q(z) + a$ þá sést, með því að setja z_1 inn báðum megin, að $a = 0$, svo að $P(z) = (z - z_1)Q(z)$. Nú hefur margliðan $Q(z)$ líka a.m.k. eina tvinntölurót z_2, svo að $Q(z)$ er deilanleg með $z - z_2$ o.s.frv. Tvinntala z_0 er sögð vera *p-föld* rót í margliðunni $P(z)$ ef z_0 kemur nákvæmlega p-sinnum fyrir í formúlunni (5). Við segjum stundum, að z_0 sé rót í $P(z)$ af *margfeldi* p. Ef ræturnar eru taldar með eins oft og margfeldi þeirra segir til um þá fæst úr (5), að *sérhver margliða af stigi* n *hefur nákvæmlega* n *tvinntölurætur.* Lítum nú á margliðu

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

þar sem stuðarnir $a_0, a_1, \ldots, a_n$ eru *rauntölur.* Ef $P(z_0) = 0$ þá er líka $P(\overline{z_0}) = 0$ því að

$$\begin{aligned} 0 = \overline{P(z_0)} &= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0} \\ &= a_n \overline{z_0}^n + a_{n-1} \overline{z_0}^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z_0} + a_0 \end{aligned}$$

þ.e.a.s. ef $s_0 + it_0$ er rót þá er $s_0 - it_0$ líka rót.

Nú sáum við hér að framan, að margliðuna $P(z)$ má rita á forminu

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Sumar ræturnar eru rauntölur, köllum þær $r_1, \ldots, r_k$. Hinar koma fyrir í pörum: $s_1 + it_1, s_1 - it_1, s_2 + it_2, s_2 - it_2, \ldots, s_m + it_m, s_m - it_m$(þar sem $k + 2m = n$). Við getum því skrifað $P(z)$ á forminu

$$\begin{aligned} P(z) = a_n &(z - r_1) \cdots (z - r_k)(z - s_1 - it_1)(z - s_1 + it_1) \cdots \\ &\cdots (z - s_m - it_m)(z - s_m + it_m) \end{aligned}$$

eða með því að taka tvinntöluliðina saman 2 og 2:

$$P(z) = a_n (z - r_1) \cdots (z - r_k)((z - s_1)^2 + t_1^2) \cdots ((z - s_m)^2 + t_m^2).$$

Með því að einskorða breytuna z við rauntölurnar sjáum við að sérhverja margliðu $P(x)$ með rauntölustuðlum og rauntölubreytu x má rita á forminu

$$P(x) = a_n (x - r_1) \cdots (x - r_k)((x - s_1)^2 + t_1^2) \cdots ((x - s_m)^2 + t_m^2)$$

þ.e.a.s. sem margfeldi af 1. stigs margliðum og 2. stigs margliðum sem hafa engar rauntölurætur.

Athugið, að þó að einungis komi fyrir rauntölur í þessari formúlu þá urðum við að nota tvinntölurnar til að leiða hana út. Athugið einnig, að af þessari formúlu leiðir, að sérhver margliða í $\mathbb{R}$ með *oddatölu* sem stig hefur að minnsta kosti eina rauntölurót.

Verkefni 1.3

Setjið tvinntölurnar í dæmum 1-20 fram á forminu $a + ib$.

1 $(4-3i)(4+3i)$

2 $(3-7i)(1+3i)$

3 $\overline{3i(2-5i)}$

4 $\dfrac{2+3i}{1-5i}$

5 $\dfrac{1}{1-i}$

6 i^{99}

7 $\dfrac{(1+i)^2}{(1-i\sqrt{3})^2}$

8 $(1+i)^6$

9 $(1+2i)^2 + \dfrac{(1+i)(1+i^8)}{2}$

10 $i\sqrt{5}(1-\sqrt{5})-(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{5}}{2})(-2+2i)$

11 $\dfrac{2+5i}{(3-7i)^2} + (2+3i)(3-4i)$

12 $\dfrac{6+7i}{7i-3} - \dfrac{2+5i}{3+7i} + \dfrac{30-23i}{58}$

13 $\dfrac{2\sqrt{3}-i3\sqrt{2}}{3i\sqrt{3}-2\sqrt{2}} + (1+i)^4$

14 $(1+i\sqrt{3})^5$

15 $(-\sqrt{3}+i\sqrt{3})^9$

16 $\dfrac{(-i\sqrt{2})^6}{(-3-\sqrt{3}i)^7}$

17 $(1+i)^4$

18 $i + i^2 + \cdots + i^{100}$

19 $1/(1-i)^3$

20 $i + i^2 + \cdots + i^{49} + i^{50}$

Setjið tvinntölurnar í dæmum 21-23 fram á skautformi með stefnuhorn á bilinu $[0, 2\pi)$.

21 $-5+5i$

22 $1+\sqrt{3}i$

23 $\dfrac{1+i}{1-i}$

24 Finnið allar

(a) sjöttu ræturnar af 1
(b) þriðju ræturnar af 8
(c) fjórðu ræturnar af -81
(d) fimmtu ræturnar af $-2-2i$

Leysið jöfnurnar í dæmum 25-28.

25 $z^4 - 16 = 0$

26 $z^2 + z + 2 = 0$

27 $z^4 - 2z^2 + 4$

28 $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$

29 Finnið allar tvinntölur z þannig að $z + 1/z \in \mathbb{R}$.

Í dæmum 30-32 skal finna allar rauntölur x og y sem uppfylla gefnar jöfnur.

30 $x + iy = |x + iy|$

31 $|x + iy| = |x - iy|$

32 $\dfrac{x+iy}{x-iy} = x - iy$

Í dæmum 33-41 skal sýna á skýringarmynd mengi allra tvinntalna z sem uppfylla gefin skilyrði.

33 $|z| < 1$

34 $z + \overline{z} = |z|^2$

35 $z - \overline{z} = i$

36 $|z - i| = |z + i|$

37 $|i - 2z| = |2z + 3i|$

38 $|z + 1| + |z - 1| = 2$

39 $z^3 \in \mathbb{R}$

40 $\dfrac{1}{z^2}$ er þvertala.

41 $|i - z^2| = |z^2 + i|$

Í dæmum 42-43 skal þátta margliðurnar yfir $\mathbb{R}$, með öðrum orðum skal skrifa þær sem margfeldi af rauntölumargliðum af sem lægstu stigi.

42 $x^4 + 4$

43 $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 + 4$

44 Finnið allar tvinntölur z sem fullnægja ójöfnunni $|z| \le |2z+1|$. Teiknið skýringarmynd.

45 Leysið jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= 0 \\ z_1 z_2 z_3 &= -4 \\ \frac{z_1}{z_2} &= i \end{aligned}$$

46 Um tvinntölu z er vitað að $\frac{1}{5} < \arg z < \frac{1}{4}$. Finnið mörk fyrir $\arg \frac{z}{2}$.

1.4 Þrepasannanir

Við tökum sem gefinn hlut, að mengi náttúrlegra talna $\mathbb{N}$ hafi eftirfarandi eiginleika:

Ef hlutmengi $A \subseteq \mathbb{N}$ uppfyllir skilyrðin

(i) $1 \in A$

(ii) Fyrir öll $p \in A$ gildir, að $p + 1 \in A$

þá er $A = \mathbb{N}$.

Þessi eiginleiki mengisins $\mathbb{N}$ er notaður í svokölluðum *þrepasönnunum*. Hugsum okkur, að fyrir sérhverja náttúrulega tölu $n \in \mathbb{N}$ sé gefin fullyrðing p_n. Að sanna með *þrepun*, að allar þessar fullyrðingar séu réttar felst í því að sanna eftirfarandi:

(i) p_1 er sönn

(ii) ef p_n er sönn þá er p_{n+1} einnig sönn,

því þá uppfyllir mengið $A = \{n \in \mathbb{N} : p_n \text{ er sönn}\}$ nefnilega skilyrðin (i) og (ii) hér að framan svo að $A = \mathbb{N}$ og þar með er p_n sönn fullyrðing fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.

Dæmi 1.4.1. Fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ gildir formúlan

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Sönnum þessa formúlu með þrepun. Þar sem $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ þá er p_1 sönn. Göngum út frá því að p_n sé sönn, og sýnum að p_{n+1} sé sönn.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

þá fæst:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

svo að p_{n+1} er sönn. Þrepasönnuninni er lokið og formúlan

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

er því sönn fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.

Summu margra talna er oft þægilegt að skrifa á samanþjöppuðu formi. Til þess notum við gríska bókstafinn Σ.Þannig setjum við

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

svo að formúluna sem við vorum að leiða út áðan má skrifa sem

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Almennt, ef $a_1, \ldots, a_n$ eru n tölur þá setjum við

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Til dæmis þá er

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2.$$

Stundum getur verið þægilegt að láta *summubreytuna* k byrja á 0 eða einhverri tölu sem er stærri en 1:

$$\sum_{k=0}^{3} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3.$$

$$\sum_{k=2}^{4} x_k = x_2 + x_3 + x_4$$

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n+1} x_{k-1}.$$

Í summunni
$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$
er summubreytan k bara einhver breyta sem tekur gildin frá 1 til og með n. Það skiptir engu hvað við köllum breytuna. T.d. þá skrifum við
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{r=2}^{n+1} a_{r-1}.$$

Dæmi 1.4.2 (Kvótasumma með kvóta q)**.** Fyrir sérhverja rauntölu $q \neq 1$ og sérhverja náttúrlega tölu $n \in \mathbb{N}$ gildir
$$\sum_{j=0}^{n} q^j = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{1}$$
Látum p_n vera yrðinguna
$$\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
p_1 er þá yrðingin
$$1 + q = \frac{1-q^2}{1-q}$$
sem er greinilega sönn. Þá lítum við á sjálfa þrepunina: Göngum út frá því, að p_n sé sönn þ.e.a.s. að
$$\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$
Þá fæst, að
$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n+1} q^j = \sum_{j=0}^{n} q^j + q^{n+1} &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}\end{aligned}$$
svo að p_{n+1} er sönn yrðing. Þar með er sannað að (1) gildir fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.

Dæmi 1.4.3. Í greininni um tvinntölurnar sönnuðum við þríhyrningsójöfnuna

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad \text{fyrir öll } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

(sem að sjálfsögðu gildir líka fyrir rauntölur þar sem $\mathbb{R}$ er hlutmengi af $\mathbb{C}$). Almennt gildir:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i| \qquad \text{fyrir öll } n \in \mathbb{N} \text{ og öll } z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}.$$

Dæmi 1.4.4. Fyrir sérhvert $n \in \mathbb{N}$ látum við $n!$ (n *hrópmerkt*) vera töluna $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ og köllum hana *aðfeldi* tölunnar n. Jafnframt setjum við $0! = 1$. Við skilgreinum ennfremur *tvíliðustuðulinn* $\binom{n}{k}$ sem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{ef } k, n \in \mathbb{N}_0 \text{ og } k \leq n.$$

Tvíliðustuðlarnir koma fyrir í *tvíliðuformúlunni*:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Við sönnum þessa formúlu með þrepun. Látum $a, b \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$ og látum p_n vera yrðinguna

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Greinilegt er, að p_1 er sönn yrðing. Göngum út frá því, að p_n sé sönn og sönnum p_{n+1} út frá því.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} a^k b^{n-k}
\end{aligned}$$

margföldum inn

$$= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

tökum út síðasta lið fyrri summu og fyrsta lið seinni summu

$$= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \tbinom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \tbinom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}.$$

látum summubreytuna hlaupa frá 0 til $n-1$ í seinni summunni og skrifum $b^{n+1-(k+1)}$ í stað b^{n-k} í þeirri fyrri:

$$\begin{aligned} &= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \tbinom{n}{k} a^{k+1} b^{n+1-(k+1)} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \tbinom{n}{k+1} a^{k+1} b^{n+1-(k+1)} + b^{n+1}. \end{aligned}$$

Drögum summurnar saman í eina summu

$$= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\tbinom{n}{k} + \tbinom{n}{k+1} \right) a^{k+1} b^{n+1-(k+1)} + b^{n+1}.$$

Nú er $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (þetta fæst beint úr skilgreiningu tvíliðustuðlanna) svo að

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \tbinom{n+1}{k+1} a^{k+1} b^{n+1-(k+1)} + b^{n+1}.$$

Látum summubreytuna hlaupa frá 1 til n

$$\begin{aligned} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \tbinom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \tbinom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

svo að yrðingin p_{n+1} er sönn. Við höfum þar með sannað tvíliðuformúluna með þrepun.

Verkefni 1.4

Í dæmum 1-4 skal sýna fram á að tiltekin jafna eða ójafna gildi fyrir öll n úr $\mathbb{N}$.

1 $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2 $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$

3 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

4 $1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 < \dfrac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$

5 Sýnið að sérhvert hlutmengi í $\mathbb{R}$, sem er ekki tómt og hefur endanlegan fjölda staka, hafi bæði stærsta stak og minnsta stak.

6 Látum A vera mengi allra náttúrlegra talna n sem fullnægja ójöfnunni

$$(1+x)^n > 1 + nx + nx^2$$

fyrir öll $x > 0$. Sýnið að A hafi minnsta stak n_1 og finnið það. Sýnið jafnframt að ójafnan sé rétt fyrir allar heilar tölur $n \geq n_1$.

7 Við segjum að heil tala n sé *slétt tala* ef til er heil tala m þannig að $n = 2m$. Við segjum að heil tala n sé *oddatala* ef $n + 1$ er slétt tala. Sannið eftirfarandi fullyrðingar:

(a) Heil tala getur ekki verið bæði slétt tala og oddatala.

(b) Sérhver heil tala er annaðhvort slétt tala eða oddatala.

8 Sýnið að um allar rauntölur $x \neq 1$ gildi jafnan

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x^{2^{k-1}}) = \frac{1 - x^{2^n}}{1 - x}.$$

Hvert er gildið á vinstri stæðunni ef $x = 1$?

9 Látum x vera rauntölu og n vera náttúrlega tölu. Sannið að $x^n > x$ ef $x > 1$ og $n \geq 2$. Sannið að $x^n < x$ ef $0 < x < 1$ og $n \geq 2$.

10 (a) Notið tvíliðu-formúluna til að sanna að fyrir sérhverja náttúrlega tölu n gildi jafnan

$$\left(\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}\prod_{r=0}^{k-1}\left(1 - \frac{r}{n}\right)\right)$$

(b) Sannið að eftirfarandi ójöfnur gilda fyrir $n > 1$

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} < 3$$

11 (a) Látum n vera náttúrlega tölu. Sýnið að

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1})$$

[Ábending: Notið kíkis-eiginleika fyrir summur.]

(b) Látum p og n vera náttúrlegar tölur. Notið a-lið til að sýna að

$$n^p < \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{p+1} < (n+1)^p$$

(c) Sýnið að

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p$$

12 Látum $a_1, \ldots, a_n$ vera rauntölur sem allar hafa sama formerki og eru allar stærri en -1. Sannið að

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Þegar $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = x$ með $x > -1$ fæst eftirfarandi ójafna sem kennd er við stærðfræðinginn Bernoulli

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Sýnið að fyrir $n > 1$ gildi jafnaðarmerkið í ójöfnu Bernoullis þá og því aðeins að $x = 0$.

13 Tölurnar í rununni $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots,$ þar sem sérhver tala frá og með tölunni 2 er summa næstu tveggja talna á undan í rununni, kallast *Fibonacci-tölur.* Hægt er að skilgreina tölurnar með þrepun á eftirfarandi hátt:

$$a_1 = 1, a_2 = 1 \text{ og } a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \text{ fyrir öll } n \geq 2.$$

Sýnið að fyrir sérhvert $n \geq 1$ gildi

$$a_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Í dæmum 14-21 skoðum við nokkrar ójöfnur varðandi meðaltöl og sýnum hvernig unnt er að beita þeim til að leysa ýmis verkefni.

Látum $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vera jákvæðar rauntölur og p vera náttúrlega tölu. Talan

$$M_p = \left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{1/p}$$

kallast $p-$*meðaltal* eða $p-$*ta meðaltal* talnanna $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Talan M_1 kallast *venjulegt meðaltal*, M_2 kallast *ferningsmeðaltal* eða *kvaðrat-meðaltal* og M_{-1} kallast *jafnvægismeðal* eða *harmónískt meðaltal*.

14 Sannið að $M_p < M_{2p}$, ef $p > 1$ og $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eru rauntölur sem ekki eru allar eins. [Ábending: Notið ójöfnu Cauchy-Schwarz með $a_k = x_k^p$ og $b_k = 1$.]

15 Notið niðurstöðu úr dæminu hér á undan til að sýna að $a^4+b^4+c^4 \geq \frac{64}{3}$ þegar $a^2 + b^2 + c^2 = 8$

16 Látum $a_1, \ldots, a_n$ vera n jákvæðar rauntölur þannig að $a_1 \cdots a_n = 1$. Sýnið að $a_1 + \cdots + a_n \geq n$ og gerið grein fyrir að jafnaðarmerkið gildi þá og því aðeins að $a_1 = \cdots = a_n = 1$. [Ábending: Beitið þrepun. Ef tölurnar $a_1, \ldots, a_{n+1}$ eru ekki allar jafnar tölunni 1, þá er að minnsta kosti ein þeirra, segjum a_1, stærri en talan 1 og að minnsta kosti ein þeirra, segjum a_{n+1}, minni en talan 1. Setjið $b_1 = a_1 a_{n+1}$, beitið þrepunarforsendu á tölurnar $b_1, a_2, \ldots, a_n$ og notfærið ykkur ójöfnuna $(a_1 - 1)(a_{n+1} - 1) < 0$.]

17 Látum $x_1, \ldots, x_n$ vera jákvæðar rauntölur. Talan

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$$

kallast *rúmfræðilegt meðaltal* talnanna $x_1, \ldots, x_n$.

(a) Látum M_p vera $p-$meðaltalið. Sýnið að $G \leq M_1$ og gerið einnig grein fyrir að $G = M_1$ ef og aðeins ef $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

(b) Látum p og q vera heiltölur, $q < 0 < p$. Ályktið út frá niðurstöðunni í a-lið að

$$M_q < G < M_p$$

ef tölurnar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eru ekki allar eins.

18 Látum a, b og c vera jákvæðar rauntölur með $abc = 8$. Notið niðurstöðurnar úr dæmi 17 til að sýna fram á að $a+b+c \geq 6$ og $ab+bc+ca \geq 12$.

19 Látum $x_1, \ldots, x_n$ vera jákvæðar rauntölur og setjum $y_k = 1/x_k$. Sýnið að

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \geq n^2$$

20 Ef a, b og c eru jákvæðar rauntölur með $a + b + c = 1$, sýnið að

$$(1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc.$$

21 Maður nokkur ætlar að fjöldaframleiða kassa, sem hver um sig skal vera einn rúmmetri. Kassarnir eiga að vera málaðir að utan og maðurinn vill hafa þá þannig í laginu að sem minnst þurfi af málningu. Hvernig er heppilegast að hafa þá í laginu?

Kafli 2

Föll, runur og raðir

Hugtakið *fall* er undirstöðuhugtak í stærðfræði. Það kemur einnig víða fyrir í daglegri umræðu þó með óbeinum hætti sé. Þegar talað er um að ein stærð sé háð annarri þá býr hugtakið fall þar að baki. Til dæmis má þar nefna setningar á borð við: póstburðargjald er háð þyngd bréfs, húsnæðisbætur eru háðar tekjum, flatarmál fernings er háð hliðarlengd.

2.1 Föll

Vörpun eða *fall* frá mengi X inn í mengi Y er regla, sem úthlutar sérhverju staki í X nákvæmlega einu staki í Y. Reglan getur hins vegar úthlutað ólíkum stökum í X sama stakinu í Y.

Varpanir verða táknaðar með bókstöfum, yfirleitt f, g eða h og við notum ritháttinn

$$f : X \to Y, \quad X \xrightarrow{f} Y \quad \text{eða} \quad f : X \to Y; x \mapsto f(x)$$

um vörpun frá X inn í Y. Mengið X kallast *skilgreiningarmengi* vörpunarinnar en mengið Y *ráðstöfunarmengi* vörpunarinnar. Í flestum þeim tilfellum sem við munum rannsaka er Y mengið $\mathbb{R}$ og X hlutmengi af $\mathbb{R}$, yfirleitt bil, hálflína eða allt mengið $\mathbb{R}$. Ef ráðstöfunarmengið Y er $\mathbb{R}$, þá köllum við vörpunina *rauntölufall*, eða *raungilt fall*.

Ef $f : X \to Y$ er vörpun og $x \in X$ þá látum við $f(x)$ tákna það stak í Y sem f lætur svara til x, stakið $f(x)$ kallast *gildið*, eða *fallgildið* í punktinum x. Við segjum líka *gildi fallsins* í punktinum x, og segjum að fallið f *taki gildi sín í menginu* Y. Yfirleitt er fallgildið gefið með forskrift eða formúlu, t.d. $X = Y = \mathbb{R}$ og $f(x) = x^2 + 1$. Við notum einnig ritháttinn $y = f(x)$ og skrifum þá t.d. $y = x^2+1$. Við köllum stundnum y *háðu breytuna* og x *óháðu breytuna*. Föll þurfa ekki að koma tölum við. Látum t.d. X vera mengi allra barna, látum Y vera mengi allra mæðra og látum f vera vörpunina, sem til sérhvers barns lætur svara móður barnsins.

Látum $f : X \to Y$ vera fall. Ef $A \subseteq X$ er hlutmengi þá látum við $f(A)$ tákna mengið

$$f(A) = \{f(x) \in Y : x \in A\}.$$

Mengið $f(X)$ kallast *myndmengi* vörpunarinnar f; ef $f(X) = Y$ þá segjum við að f sé *átæk*. Ef f lætur mismunandi stök í Y svara til mismunandi staka í X þ.e.a.s. $f(x_1) \neq f(x_2)$ ef $x_1 \neq x_2$ þá segjum við að vörpunin f sé *eintæk*; ef f er bæði eintæk og átæk þá segjum við að f sé *gagntæk*.

Sem dæmi látum f og g tákna föllin frá $\mathbb{R}$ inn í $\mathbb{R}$, sem gefin eru með forskriftunum $f(x) = x^2+1$ og $g(x) = x^3+1$. Þá er f hvorki eintæk né átæk en g er gagntæk.

Ef f er gagntæk vörpun frá X inn í Y þá gildir um sérhvert y í Y að til er nákvæmlega eitt x í X þannig að $f(x) = y$. Við getum því skilgreint vörpun g frá Y inn í X á eftirfarandi hátt: $g(y) = x$ ef $f(x) = y$. Vörpunin g kallast *andhverfa* f og er oftast táknuð með f^{-1}.

Fall f frá mengi X inn í $\mathbb{R}$ eða $\mathbb{C}$ er *takmarkað* ef til er tala $M > 0$ þannig að $|f(x)| \leq M$ fyrir öll x í X. Fall f sem tekur bara gildi sín í $\mathbb{R}$ er sagt *takmarkað að ofan* (*neðan*) ef til er tala M þannig að $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq M$) fyrir öll x í X.

Skilgreining 2.1.1. Látum $f : X \to \mathbb{R}$. Framvegis munum við skrifa

$$\sup f_X = \sup\{f(x) : x \in X\}$$

og

$$\inf f_X = \inf\{f(x) : x \in X\}$$

Ef fallið f er ekki takmarkað að ofan þá skrifum við $\sup f_X = +\infty$ en $\inf f_X = -\infty$ ef það er ekki takmarkað að neðan. Oft skrifum við $\sup f$ og $\inf f$ þegar ljóst er hvert skilgreiningarmengið X er.

Ef f og g eru föll frá mengi X inn í $\mathbb{R}$ eða $\mathbb{C}$ þá skilgreinum við *summu* fallanna f og g sem fallið, táknað með $f+g$, sem skilgreint er með forskriftinni

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{fyrir öll } x \in X$$

og *margfeldi* fallanna f og g, táknað fg, sem fallið sem skilgreint er með forskriftinni

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \text{fyrir öll } x \in X$$

og ef k er tala (rauntala eða tvinntala) þá er kf fallið sem skilgreint er með forskriftinni

$$(kf)(x) = k \cdot f(x) \qquad \text{fyrir öll } x \in X.$$

Ef $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ eru varpanir þá skilgreinum við vörpun

$$g \circ f : X \to Z$$

með því að setja

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \text{fyrir öll } x \in X.$$

Vörpunin $g \circ f$ kallast *samskeyting* varpananna f og g.

Skilgreining 2.1.2. Fyrir fall $f : X \to Y$ setjum við

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

og köllum þetta mengi *fallrit* eða *graf* fallsins f.

Verkefni 2.1

Í dæmum 1-8 eru föll skilgreind með formúlum.

(i) Í hverju dæmi fyrir sig skal tilgreina stærsta hlutmengi í $\mathbb{R}$ þar sem fallið er skilgreint. Það mengi kallast þá *skilgreiningarmengi* fallsins.

(ii) Í dæmum 1-4 skal jafnframt tilgreina myndmengin.

1 $f(x) = (\sqrt{x})^2$

2 $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

3 $g(x) = \sqrt{x^2 + x - 12}$

4 $g(x) = \sqrt{8x - x^2 - 14}$

5 $h(x) = \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{3 - x^2}$

6 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

7 $f(x) = \left(\dfrac{3}{2 - x}\right)^{1/2}$

8 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}}$

9 Skrifið $f(g(x))$ og $g(f(x))$ ef $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ og $g(x) = \sqrt{1 - x}$. Finnið síðan skilgreiningarmengi og myndmengi fallanna.

10 Finnið g þannig að $f(g(x)) = 1 + x^2 - 2x^3 + x^4$ þar sem $f(x) = 1 + x^2$.

11 Setjum $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -1/2\}$ og $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Sýnið að $f(z) = z/(1 + z)$ sé gagntæk vörpun frá H á E.

2.2 Runur

Rauntalnaruna er fall s frá $\mathbb{N}$ inn í $\mathbb{R}$ en *tvinntalnaruna* er fall frá $\mathbb{N}$ inn í $\mathbb{C}$. Sem samheiti yfir hvort tveggja notum við orðið *talnaruna*, eða bara *runa*. Við getum gert lista yfir gildi talnarunu s

$$s(1), s(2), \ldots, s(n), \ldots$$

Yfirleitt notum við eftirfarandi ritháttt: Setjum $s_1 = s(1)$, $s_2 = s(2)$ og almennt $s_n = s(n)$. Tölurnar

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

kallast *liðir* rununnar; nánar til tekið köllum við s_n n-ta lið rununnar. Runan s er jöfnum höndum táknuð með $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $(s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots)$ eða bara (s_n).

Dæmi 2.2.1. (i) $s(n) = 2n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Þessa runu má einnig rita sem $(2n)_{n=1}^{\infty}$ eða $(2, 4, \ldots, 2n, \ldots)$.
(ii) $s(n) = n^2 + \sqrt{n}$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$, rununa má einnig rita sem $(n^2 + \sqrt{n})_{n=1}^{\infty}$ eða $(2, 4 + \sqrt{2}, \ldots, n^2 + \sqrt{n}, \ldots)$.
(iii) $(\cos n)_{n=1}^{\infty}$. Hér er $s(n) = \cos n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.
(iv) Stundum er n–ti liður skilgreindur út frá liðum með lægri númer t.d. $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ og $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ef $n \geq 3$. Slík skilgreining kallast *rakin framsetning* eða *þrepaskilgreining*. Runan $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ er hin svonefnda *Fibonacci-runa*. Hún er kennd við ítalska kaupmanninn og stærðfræðinginn Leonardo sem einnig var kallaður Fibonacci (af Bonacci ættinni), og var uppi um aldamótin 1200. Hér er örðugra að finna formúlu fyrir n-ta liðnum F_n en sýna má fram á að

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

(v) Sem dæmi um tvinntalnarunu getum við tekið rununa $(i^n)_{n=1}^{\infty}$. Ef við skrifum lista fyrir þessa runu fæst:

$$i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, i, \ldots$$

(vi) Runa þarf alls ekki að taka óendanlega mörg gildi: Til dæmis tekur runan $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ (þ.e.a.s. runan $(-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots)$) bara tvö gildi og runan $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ tekur bara eitt gildi.

Skilgreining 2.2.2. Runa sem tekur bara eitt gildi kallast *fastaruna*.

Runa s er því fastaruna ef til er tala c þannig að $s(n) = c$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Rununa má líka rita sem $(c, c, \ldots, c, \ldots)$. Ef við notum skilgreiningar í grein 2.1 á summu og margfeldi falla með gildum í $\mathbb{R}$ eða $\mathbb{C}$ fást eftirfarandi forskriftir fyrir runur:

$$\begin{aligned}
(a_n)_{n=1}^{\infty} + (b_n)_{n=1}^{\infty} &= (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty} \\
(a_n)_{n=1}^{\infty} \cdot (b_n)_{n=1}^{\infty} &= (a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty} \\
k(a_n)_{n=1}^{\infty} &= (ka_n)_{n=1}^{\infty}.
\end{aligned}$$

Við getum orðað þessar reglur á eftirfarandi hátt: Við leggjum saman tvær runur með því að leggja saman lið fyrir lið, við margföldum saman tvær runur með því að margfalda lið fyrir lið og við margföldum runu með tölu með því að margfalda alla liði rununnar með tölunni.

Við höfum í mörgum tilfellum áhuga á hegðun n-ta liðs runu fyrir stór gildi á n og einkum og sér í lagi viljum við kanna hvort liðirnir þjappist um einhverja tiltekna tölu. Við skulum útskýra þetta nánar.

Skilgreining 2.2.3 (1. útgáfa)**.** Rauntalnaruna $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ er sögð hafa *markgildið* L ef eftirfarandi skilyrði er fullnægt:

Ef við færum okkur eftir rununni komum við að lið, þannig að liðurinn og allir sem á eftir koma eru eins og L að 1. aukastaf. Ef við færum okkur áfram komum við að lið, þannig að liðurinn og allir sem á eftir koma eru eins og L að 2. aukastaf, ef við færum okkur enn áfram eftir rununni komum við að lið, þannig að liðurinn og allir sem á eftir koma eru eins og L að 3. aukastaf og þannig koll af kolli.

Við segjum að runan sé *samleitin* með markgildi L eða að runan stefni á L.

Dæmi 2.2.4. Fastarunur, runur þar sem allir liðir eru eins, hafa augljóst markgildi. Skoðum næst rununa $(s(n))_{n=1}^{\infty}$ þar sem $s_n = (1 - 1/n)$. Þetta er runan

$$(0, 1/2, 2/3, 3/4, \ldots, (n-1)/n, \ldots).$$

Þessi runa hefur markgildið 1. Skoðum t.d. liðinn $1 - 1/1000$. Nú er $1 - 1/1000 = 1 - 1/10^3 = 1 - 0,001 = 0,999$ sem er eins og 1 að öðrum aukastaf. Þar sem $s_n < s_m$ ef $n > m$ þá er s_n eins og 1 að öðrum aukastaf ef $n \geq 1000$. Á sama hátt sést að þegar komið er að lið nr. 10^8 þá er sá liður og allir sem á eftir koma eins og 1 að 7. aukastaf. Svona má halda áfram.

Næst setjum við skilgreininguna um markgildi fram á hnitmiðaðri hátt.

Skilgreining 2.2.5 (2. útgáfa)**.** Rauntalnaruna $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ er sögð hafa *markgildið* L ef fyrir sérhverja náttúrulega tölu k er til númer N þannig að liður nr. N í rununni og allir sem á eftir koma er eins og L að k-ta aukastaf.

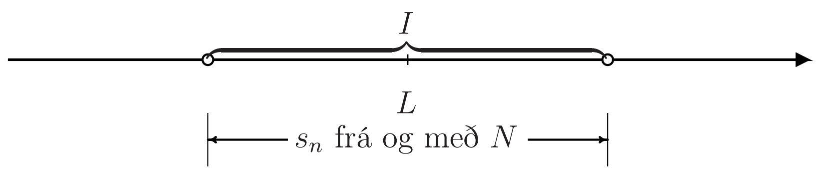
Við höfum séð að $|s - t| < 10^{-k}$ ef s og t eru eins að k-ta aukastaf og að ef $|s - t| < 10^{-(m+1)}$ þá eru s og t eins að m-ta aukastaf hið minnsta. Við getum því sett fram enn eina jafngilda skilgreiningu á markgildi.

Skilgreining 2.2.6 (3. útgáfa)**.** Rauntalnaruna $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ er sögð hafa *markgildið* L ef fyrir sérhverja náttúrulega tölu k er til númer N þannig að $|L - s_n| < 10^{-k}$ fyrir öll númer (þ.e.a.s. allar náttúrulegar tölur) $n \geq N$, eða ef við leysum upp úr tölugildinu,

$$L - 10^{-k} < s_n < L + 10^{-k}$$

yrir öll $n \geq N$.

Á myndinni hér fyrir neðan er I bilið $I = (L - 10^{-k}, L + 10^{-k})$.



Mynd 2.1:

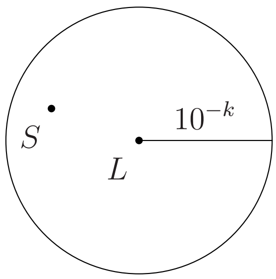
Þetta er sú útgáfa sem þægilegast er að vinna með og við munum yfirleitt nota. Við segjum líka að runan $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *stefni á* L, að runan s sé *samleitin* *með markgildi* L og ritum $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ eða $s_n \to L$, þegar $n \to \infty$ eða bara $s_n \to L$.

Dæmi 2.2.7. $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$ vegna þess að um hvaða náttúrulega tölu k sem er gildir að ef $N \geq 1o^k$ þá er $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < 10^{-k}$ ef $n \geq N$. Runan $((-1)^n)_{n=1}^\infty$ hefur hins vegar ekkert markgildi vegna þess að ef L er einhver tala þá er $|(-1)^n - L| \geq 1$ fyrir allar sléttar tölur n ef $L \leq 0$ og fyrir allar oddatölur n ef $L \geq 0$.

Runa sem er ekki samleitin er sögð *ósamleitin.*

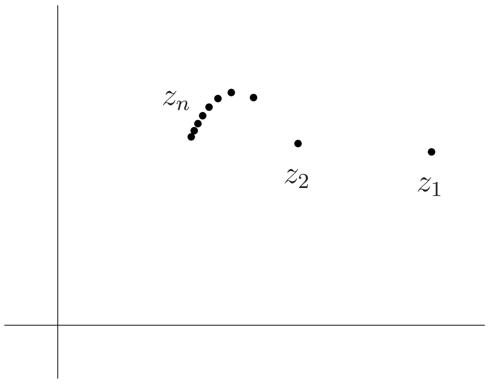
Dæmi 2.2.8. Skoðum nánar hvað það merkir að runa (s_n) stefni *ekki* á tölu L. Þá eru skilyrði skilgreiningarinnar hér að ofan ekki uppfyllt sem þýðir að til er bil með miðju L, eins og að ofan, þannig að óendanlega margir liðir rununnar (s_n) eru utan bilsins. Það er nokkuð ljóst að þannig háttar með rununa $((-1)^n)$.

Skilgreiningin hér að framan getur allt eins átt við um tvinntalnarunur. Úr kaflanum um tvinntölur vitum við að ef L og S eru tvinntölur þá er talan $|L - S|$ *fjarlægðin* milli L og S. Að $|L - S| < 10^{-k}$ þýðir því að S liggi innan skífu með miðju L og radíus 10^{-k}.



Mynd 2.2:

Skilgreining 2.2.6 sem við settum fram um rauntalnarunur á sér samsvörun fyrir tvinntalnarunur; við þurfum bara að setja orðið tvinntalnaruna í stað rauntalnaruna. Að tvinntalnaruna $(z_n)_{n=1}^\infty$ stefni á L þýðir þá að fyrir hvaða skífu sem er með miðju L er til tala N þannig að z_n liggur innan skífunnar ef $n \geq N$. Þetta má líka orða þannig að fyrir hvaða náttúrulega tölu k sem er, er til tala N þannig að z_n liggur innan skífunnar með miðju L og radíus 10^{-k} ef $n \geq N$. Ef $(z_n)_{n=1}^\infty$ er tvinntalnaruna þá tengjast henni tvær



Mynd 2.3:

rauntalnarunur $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ og $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ þar sem $x_n = \operatorname{Re} z_n$ og $y_n = \operatorname{Im} z_n$ fyrir sérhvert n. Ef $z = x + iy$ þar sem x og y eru rauntölur þá gildir, að

$$|x|\,, |y| \leq |z| \leq |x| + |y|\,.$$

Með því að nota þessar ójöfnur má sýna fram á að $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ er samleitin ef og aðeins ef $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ og $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ eru samleitnar og að $z_n \to L_1 + iL_2$ ef $x_n \to L_1$ og $y_n \to L_2$.

Dæmi 2.2.9. $\frac{1}{n} + i\left(1 - \frac{1}{n}\right) \to i$, vegna þess að $\frac{1}{n} \to 0$ þegar $n \to \infty$.

Af því sem að ofan stendur mætti ætla að athuganir á tvinntalnarunu mætti einskorða við að athuga tilsvarandi raunhluta- og þverhlutarunur. Það er þó ekki alltaf svo; stundum má fá gagnlegar upplýsingar um rauntalnarunur með því að líta á rétt valdar tvinntalnarunur eins og kemur í ljós síðar.

Víkjum nú aftur að rauntalnarunum. Við segjum að rauntalnaruna $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ sé *takmörkuð* ef finna má rauntölu $M > 0$ þannig að $|s_n| \leq M$ fyrir öll n, sem er það sama og að $-M \leq s_n \leq M$ fyrir öll n. Samleitnar runur eru takmarkaðar. (Sjá dæmi í dæmakaflanum.)

Rauntalnaruna $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ er sögð *vaxandi* ef $s_n \leq s_{n+1}$ fyrir öll n, þ.e.a.s. ef

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots\,.$$

Runan $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ er sögð *minnkandi* ef $s_n \geq s_{n+1}$ fyrir öll n, þ.e. ef

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_n \geq \cdots\,.$$

Dæmi 2.2.10. Runan

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \qquad \text{er vaxandi}$$

en runan

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty} \qquad \text{er minnkandi.}$$

Runa er sögð *einhalla* ef hún er annaðhvort vaxandi eða minnkandi. Um samleitnieiginleika einhalla runa höfum við eftirfarandi setningu.

Setning 2.2.11. *Takmörkuð einhalla rauntalnaruna er samleitin.*

Sönnun. Látum $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ vera takmarkaða vaxandi runu. Myndum mengið

$$A = \{s_n : n \in \mathbb{N}\},$$

mengi þeirra staka sem koma fyrir sem liðir rununnar. Þar sem runan er takmörkuð þá er til M þannig að $-M \leq s_n \leq M$ fyrir öll n og því hefur A efri mörk. Setjum $L = \sup A$. Þá gildir sérstaklega að

$$s_n \leq L \qquad \text{fyrir öll } n \tag{1}$$

Lát nú k vera náttúrulega tölu. Talan $L - 10^{-k}$ er ekki yfirtala fyrir mengið A og því er til n þannig að

$$L - 10^{-k} < s_n \leq L.$$

Þar sem runan er vaxandi þá gildir að

$$L - 10^{-k} < s_m \leq L, \text{ fyrir öll } m \geq n$$

sem sýnir að s_m er eins og L að k-ta aukastaf fyrir $m \geq n$.

Ef $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ er takmörkuð minnkandi runa þá er $(-s_n)_{n=1}^{\infty}$ takmörkuð vaxandi runa og hefur því markgildi L samkvæmt því sem við vorum að sanna. En þá stefnir s_n á $-L$ vegna $|L - (-s_n)| = |-L - s_n|$. □

Dæmi 2.2.12. Sýnið að runan $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ þar sem $s_1 = \sqrt{2}$ og $s_{n+1} = \sqrt{2 + s_n}$ fyrir öll n er vaxandi og takmörkuð og þar með samleitin.

Úrlausn. Sýnum með þrepun að $s_n < 2$ fyrir öll n. Nú er $s_1 < 2$ og ef við gerum ráð fyrir að $s_n < 2$ þá fæst

$$s_{n+1} = \sqrt{2+s_n} < \sqrt{2+2} = 2.$$

Þar með er $s_n < 2$ fyrir öll n. Nú fæst

$$\begin{aligned}(s_{n+1}-s_n)(s_{n+1}+s_n) &= s_{n+1}^2 - s_n^2\\ &= 2 + s_n - s_n^2\\ &> 2s_n - s_n^2\\ &= s_n(2-s_n) > 0 \qquad \text{vegna } 0 < s_n < 2.\end{aligned}$$

Þá er $s_{n+1} - s_n > 0$ vegna þess að $s_{n+1} + s_n > 0$, þ.e.a.s. $s_n < s_{n+1}$ fyrir öll n.

Runan hér að ofan er takmörkuð og vaxandi og því samleitin. Hvert er markgildið L? Fyrstu liðir rununnar eru

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

svo líta má á markgildið L sem túlkun á óendanlega forminu

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}}$$

Lítum á jöfnuna $s_{n+1} = \sqrt{2+s_n}$. Þar sem markgildið er til þá getum við skrifað

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+s_n}.$$

Af þessu leiðir (eins og síðar verður gerð ítarleg grein fyrir) að,

$$L = \sqrt{2+L}$$

svo að $L^2 = 2 + L$. Lausnir þessarar jöfnu eru $L = 2$ og $L = -1$. Þar sem runan er jákvæð vaxandi runa þá getur L ekki verið -1, svo $L = 2$.

Í næstu setningu eru settar fram einfaldar reglur um runumarkgildi. Þessar reglur eru ágæt hjálpartæki við athuganir á tilvist markgilda.

Setning 2.2.13. (i) *Lát* (s_n) *vera samleitna runu,* $\lim s_n = L$*. Búum til nýja runu* $(|s_n|)$ *af tölugildum liðanna í* (s_n)*. Hún er líka samleitin og* $\lim |s_n| = |L|$.

(ii) *Lát* (s_n) *vera runu og* L *vera tölu. Búum til nýja runu* $(|s_n - L)$*. Um samband þessara runa gildir að*

$$\lim s_n = L \text{ ef og aðeins ef} \lim |s_n - L| = 0.$$

(iii) *Lát* (s_n) *vera samleitna runu,* $\lim s_n = L$*. Ef* $s_n \geq 0$ *fyrir öll* n *þá er* $L \geq 0$.

(iv) **Klemmureglan** *Látum*

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}, \quad (b_n)_{n=1}^{\infty} \quad \text{og} \quad (c_n)_{n=1}^{\infty}$$

vera rauntalnarunur þannig að

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \text{fyrir öll } n$$

og

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = x.$$

Þá er runan $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *samleitin og*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = x.$$

(v) *Lát* (a_n) *vera runu og* t *vera tölu. Búum til nýja runu* (ta_n) *með því að margfalda alla liði rununnar* (a_n) *með* t*. Þá gildir að ef* (a_n) *er samleitin,* $\lim a_n = L$*, þá er runan* (ta_n) *samleitin og* $\lim ta_n = tL$.

Sönnun. Við skulum sanna (iii) og (v). Ef $L < 0$ þá má finna náttúrulega tölu k þannig að $-L > 10^{-k}$. En þá er $a_n - L \geq -L > 10^{-k}$ svo að $\lim a_n \neq L$ skv. 3. útgáfu á skilgreiningu runumarkgildis.

Til að sanna (v) þá veljum við náttúrulega tölu l þannig að $|t| < 10^l$. Notum 3. útgáfu á skilgreiningu á runumarkgildi. Gefin náttúruleg tala k. Þurfum að sýna fram á tilvist N þannig að

$$|ta_n - tL| < 10^{-k} \text{ fyrir öll } n \geq N.$$

. Notm okkur samleitni (a_n) til að velja N þannig að

$$|a_n - L| < 10^{-l-k} \text{ fyrir öll } n \geq N.$$

Þá fæst að,

$$|ta_n - tL| = |t| \cdot |a_n - L| < 10^l 10^{-l-k} = 10^{-k}$$

fyrir öll $n \geq N$. □

Í eftirfarandi setningu eru settar fram mikilvægar reiknireglur varðandi runumarkgildi.

Setning 2.2.14. *Látum* (s_n) *og* (t_n) *vera samleitnar talnarunur og* $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ *og* $\lim_{n\to\infty} t_n = M$. *Þá er*

(i) $\lim_{n\to\infty} s_n \pm t_n = L \pm M$

(ii) $\lim_{n\to\infty} s_n t_n = LM$

(iii) *og ef* $s_n \neq 0$ *fyrir öll* n *og ef* $L \neq 0$ *þá er*

$$\lim_{n\to\infty} 1/s_n = 1/L.$$

Sönnun. Við skulum sanna (ii) og (iii). Við notum setninguna á undan 2.2.13. Við fáum að

$$|LM - s_n t_n| = |LM - Lt_n + Lt_n - s_n t_n| \leq |L| \cdot |M - t_n| + |t_n| \cdot |L - s_n|.$$

Nú er runan (s_n) samleitin og því takmörkuð, til er K þannig að $|s_n| \leq K$ fyrir öll n. Þar með er

$$0 \leq |LM - s_n t_n| \leq |L| \cdot |M - t_n| + K|L - s_n|.$$

Tveir síðustu liðir stefna á 0. Þar með stefnir summa þeirra á 0 og þá gildir að $\lim |LM - s_n t_n| = 0$ og þar með er $\lim s_n t_n = LM$, alt samkvæmt setningunni á undan, 2.2.13.

Til að sanna (iii) þá skulum við fyrst athuga að ef $\lim s_n = L$ og $L \neq 0$ þá er til númer N þannig að $|s_n| \geq |L|/2$ ef $n \geq N$. Veljum náttúrulega tölu k þanig að $10^{-k} < |L|/2$ og síðan N þannig að $|L - s_n| < 10^{-k}$ ef $n \geq N$. Þá fæst að

$$|\,|L| - |s_n|\,| \leq |L - s_n| < 10^{-k} < |L|/2$$

ef $n \geq N$. Við fáum þá að

$$0 \leq |\frac{1}{s_n} - \frac{1}{L}| = |\frac{L - s_n}{Ls_n}| = \frac{|L - s_n|}{|Ls_n|} \leq \frac{2}{L^2}|L - s_n|.$$

Síðast liður stefnir á 0 og þar með er $\lim 1/s_n = 1/L$, allt samkvæmt setningunni á undan, 2.2.13. □

Dæmi 2.2.15. Lát $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$ vera minnkandi runu af lokuðum og takmarkuðum bilum. Þá mynda vinstri endapunktar bilanna vaxandi runu takmarkaða runu (a_n) og hægri endapunktarnir minnkandi takmarkaða runu (b_n) og þar með eru báðar runurnar samleitnar. Lát

$$a = \lim a_n \text{ og } b = \lim b_n.$$

Þá gildir samkvæmt setningunni á undan, 2.2.14, að

$$b - a = \lim b_n - \lim a_n = \lim(b_n - a_n) \geq 0,$$

svo að fyrir sérhverja náttúrulega tölu k gildir

$$a_k \leq \lim a_n \leq \lim b_n \leq b_k.$$

Þar með fæst að bilið $[a, b]$ er hlutmengi af öllum bilunum $[a_k, b_k]$ svo að

$$[a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

(Raunar gildir hér jafnaðarmerki.) Sér í lagi þá er sniðmengið ekki tómt. Sniðmengið er einspunktsmengi ef lengd bilanna stefnir á 0.

Athugasemd. Ef runurnar $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ og $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ eru báðar samleitnar þá er runan $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ samleitin samkvæmt síðustu setningu. Ef hins vegar $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ er samleitin og $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ er ósamleitin þá er runan $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ ósamleitin. Ef báðar runurnar $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ og $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ eru ósamleitnar þá getur runan $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ verið hvort sem er samleitin eða ósamleitin (sjá dæmið hér á eftir).

Dæmi 2.2.16. Runurnar

$$(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots), \quad (0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots), \quad (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$$

eru allar ósamleitnar, en summa þeirra tveggja fyrstu, sem er fastarunan $(0, 0, 0, 0, 0, \dots)$, er samleitin. Hins vegar er summa tveggja seinni runanna, runan $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$, ósamleitin.

Dæmi 2.2.17. Markgildið

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

því $(-1/n) \leq (\sin n/n) \leq (1/n)$ og $\lim_{n\to\infty}(-1/n) = \lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$.

Eftirfarandi markgildi eru þekkt eða verða fundin síðar:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$
$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = 0$$

og

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{ef } |a|<1 \\ 1 & \text{ef } a=1 \end{cases}.$$

Athugið að síðasta markgildið hér fyrir ofan er ekki til fyrir önnur gildi á a.

Verkefni 2.2

Í dæmum 1-17 skal kanna markgildi gefinna runa og ákvarða markgildið þar sem það á við.

1 $a_n = \dfrac{1}{5n^2}$

2 $a_n = \dfrac{3n+2}{5n-3}$

3 $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$

4 $a_n = \dfrac{n^2}{2n+1}$

5 $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}+\sqrt[5]{n}}$

6 $a_n = (-1)^n \dfrac{2n^3}{n^3+1}$

7 $a_n = 1 + (-1)^n$

8 $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$

9 $a_n = \cos \dfrac{n\pi}{2}$

10 $a_n = n \sin n\pi$

11 $a_n = \sqrt{\dfrac{2+\cos n}{n}}$

12 $a_n = \dfrac{\sin n}{3^n}$

13 $a_n = \dfrac{(\frac{2}{3})^n}{(\frac{1}{2})^n + (\frac{9}{10})^n}$

14 $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}$

15 $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$

16 $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(2n)^n}$

17 $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}$

Í dæmum 18-21 skal ákvarða hvort runurnar séu vaxandi, minnkandi eða yfir höfuð einhalla.

18 $a_n = \dfrac{n-2}{n+2}$

19 $a_n = \dfrac{n}{4n-1}$

20 $a_n = n - n^2$

21 $a_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

22 Sýnið að $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |L|$ ef $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

23 Látum $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vera runu. Sýnið að $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \neq 0$ hafi í för með sér að runan $((-1)^n a_n)_{n=1}^{\infty}$ sé ósamleitin.

24 Runa $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ er gefin með

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4)$$

(a) Sýnið að $a_n < 4$ fyrir öll $n \geq 1$ og $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sé strangt vaxandi.

(b) Finnið markgildi rununnar.

25 Látum x og y vera rauntölur þannig að $x > y > 0$. Skilgreinum runu (a_n) með eftirfarandi hætti:

$$\begin{aligned} a_1 &= x + y \\ a_n &= x + y - xy/a_{n-1}, \quad \text{fyrir öll} \quad n > 1 \end{aligned}$$

Sýnið að $a_n = (x^{n+1} - y^{n+1})/(x^n - y^n)$, fyrir öll n. Finnið einnig markgildi rununnar. Hvernig verður runan þegar $x = y$ og hvert verður þá markgildi hennar?

26 Látum (a_n) vera runu með $a_n > 0$, fyrir öll n. Gerum ráð fyrir að $a_{n+1}/a_n \to \rho$, þegar $n \to \infty$. Sýnið:

(a) Ef $\rho < 1$, þá $a_n \to 0$, þegar $n \to \infty$

(b) Ef $\rho > 1$, þá $a_n \to \infty$, þegar $n \to \infty$.

27 Fyrir hvaða rauntölur θ er runan $(\sin n\theta)_n$ samleitin? [Ábending: Notið tvinntölur.]

28 Lát (s_n) vera samleitna runu. Sannið að runan sé takmörkuð.

29 Lát (s_n) og (t_n) vera samleitnar runur þannig að $s_n \geq t_n$ fyrir öll n. Sannið að $\lim s_n \geq \lim t_n$. Hvað ef forsendum er breytt í $s_n \geq t_n$ fyrir öll $n \geq 11$?

30 Látum a_0 og b_0 vera jákvæðar tölur þannig að $a_0 > b_0$. Setjum

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

(a) Sýnið að

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$

(b) Ályktið að (a_n) og (b_n) séu samleitnar.

(c) Sýnið að $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Í dæmum 29-32 skal fyrst gera grein fyrir því hvort runurnar séu takmarkaðar. Síðan skal kanna hvort þær séu samleitnar og finna markgildi þeirra ef svo er.

31 $a_n = 1 + (-1)^n + i^n + (-i)^n$

32 $a_n = \dfrac{(1+i)^n}{n}$

33 $a_n = \dfrac{\log(n^2+1)}{n}$

34 $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$

35 Í þessu dæmi er ætlunin að búa til reiknirit til að reikna út kvaðratrætur.

(a) Látum $A > 0$. Rannsakið fallið $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{A}{x})$ fyrir $x > 0$ og gerið grein fyrir því að f hafi lággildi í $x = \sqrt{A}$. Sýnið svo fram á að $f(x) > x$ fyrir $x > \sqrt{A}$ og $f(x) < x$ fyrir $x < \sqrt{A}$.

(b) Látum $A > 0$ og $x_1 > 0$ vera gefin. Skilgreinum rununa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ með

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

Reiknið fyrstu 4 liði rununnar í tilfellinu þegar $A = 2$ og $x_1 = 2$. Notið svo eiginleika fallsins f til að sanna, fyrir hvaða $A > 0$ og $x_1 > 0$ sem er, að runan sé minnkandi frá og með $n = 2$. Sannið að lokum að runan sé samleitin og finnið markgildi hennar.

36 Látum $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vera runu sem uppfyllir skilyrðið

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L.$$

Sýnið að runan $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sé samleitin og $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

37 Látum $k > 0$ og $x_1 > 0$ og setjum $x_{n+1} = \dfrac{k}{1+x_n}$ fyrir $n \geq 1$. Sýnið að önnur af rununum $x_1, x_3, x_5, \ldots$ og $x_2, x_4, x_6, \ldots$ sé vaxandi og hin sé minnkandi. Ályktið svo út frá því að runan $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sé samleitin og markgildi hennar sé jákvæð rót jöfnunnar $x^2 + x = k$.

38 Látum $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ vera Fibbonacci-rununa. Ályktið út frá niðurstöðunni í dæminu hér að ofan að runan $(F_{n+1}/F_n)_{n=1}^{\infty}$ sé samleitin. Látum

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Sýnið að $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

39 Látum $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vera runu og setjum $b_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$.

(a) Sýnið að $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ hafi í för með sér $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

(b) Finnið dæmi þar sem runan (a_n) er ósamleitin en runan (b_n) sé samleitin.

2.3 Raðir

Gríski heimspekingurinn Zeno setti fram nokkrar sniðugar þversagnir á 5. öld fyrir Kristsburð sem menn veltu vöngum yfir öldum saman.

Ein þversagnanna var eitthvað á þessa leið: Hugsum okkur kapphlaup milli Akkillesar og skjaldböku (Akkilles var fótfrár forngrískur kappi), þar sem skjaldbakan fær forskot, þá nær Akkilles aldrei skjaldbökunni, segir Zeno, vegna þess að þegar Akkilles hefur hlaupið forskotið þá er skjaldbakan komin aðeins lengra. Þegar Akkilles hefur hlaupið þann spöl er skjaldbakan enn á undan. Þegar Akkilles hefur hlaupið þann spöl líka hefur skjaldbakan bætt einhverju við o.s.frv. Akkilles nær aldrei skjaldbökunni.

Við skulum smíða stærðfræðilegt líkan af þessu ferli.

Hugsum okkur að skjaldbakan hlaupi með föstum hraða h_1 m/sek og Akkilles með föstum hraða h_2 m/sek og að Akkilles sé t sekúndur að hlaupa forskotið. Á þeim tíma bætir skjaldbakan $h_1 t$ metrum við. Þann spöl hleypur Akkilles á $\frac{h_1}{h_2}t$ sekúndum, og á meðan fer skjaldbakan $\frac{h_1^2}{h_2}t$ metra sem það tekur Akkilles $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 t$ sekúndur að hlaupa. þá eru liðnar

$$t + \frac{h_1}{h_2}t + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 t$$

sekúndur. Svona heldur þetta áfram og á n-ta þrepi eru liðnar

$$t + \frac{h_1}{h_2}t + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 t + \cdots + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{n-1} t$$

sekúndur. Við skulum nú láta

$$s_1 = t$$

og

$$s_n = t + \frac{h_1}{h_2}t + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 t + \cdots + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{n-1} t \qquad \text{ef } n > 1.$$

Með því að nota formúluna úr dæmi 1.4.2 fæst:

$$s_n = t\left(\frac{1-\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^n}{1-\frac{h_1}{h_2}}\right) \qquad \text{ef } n > 1.$$

Ef $h_2 > h_1$ þ.e. ef Akkilles hleypur hraðar en skjaldbakan þá er runan $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ samleitin og samkvæmt markgildum aftast í grein 2.2 þá er

$$\lim_{n\to\infty} s_n = t\left(\frac{1}{1-\frac{h_1}{h_2}}\right) = \frac{th_2}{h_2 - h_1}.$$

Eftir $\frac{th_2}{h_2-h_1}$ sekúndur eru Akkilles og skjaldbakan á sama stað og forskot skjaldbölunnar er uppurið.

Runan $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ er dæmi um það sem kallað er *röð* eða stundum *óendanleg röð.* Við ætlum að gefa nákvæma lýsingu á því hvað óendanleg röð er.

Skilgreining 2.3.1. Fyrir gefna talnarunu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ búum við til aðra runu $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ með því að leggja saman liði í gefnu rununni. Þ.e.a.s.

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2 \quad \text{og almennt} \quad s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Runan $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ kallast *óendanleg röð*, eða bara *röð*, táknuð með

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{eða} \quad \sum a_k.$$

Talan a_n kallast n-ti *liður* raðarinnar, talan s_n kallast n-ta *hlutsumma* raðarinnar og runan $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ kallast *hlutsummuruna* raðarinnar.

Í dæminu um Akkilles og skjaldbökuna þá er $a_1 = t$ og $a_n = t\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{n-1}$ ef $n > 1$ og $s_n = t + \frac{h_1}{h_2}t + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 t + \cdots + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{n-1} t = t\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^k$.

Eins og í dæminu að framan höfum við oft áhuga á að kanna samleitni hlutsummurunu tiltekinnar raðar.

Skilgreining 2.3.2. Röð $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ er sögð *samleitin* þegar hlutsummurunan $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ er samleitin. Ef $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ þá segjum við að röðin $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sé *samleitin með summu* eða *markgildi* S, og skrifum

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

eða

$$\sum a_k = S.$$

Þegar við skrifum $\sum a_k = S$ þá þýðir það í fyrsta lagi, að röðin sé samleitin þ.e. að hlutsummurunan $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ sé samleitin og í öðru lagi, að markgildi hlutsummurununnar sé S. Athugið að við notum þá táknið $\sum a_k$ um tvö fyrirbæri, nefnilega sjálfa röðina og einnig um markgildið.

Dæmi 2.3.3. Sýnið að $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

Úrlausn. Athugum hlutsummurununa $(s_n)_{n=1}^{\infty}$. Nú er

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right).$$

Þar sem $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ þá fáum við

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 1.$$

Eins og fyrir endanlegar summur höfum við eftirfarandi eiginleika:

Setning 2.3.4. *Látum $\sum a_n$ og $\sum b_n$ vera samleitnar tvinntalnaraðir og α og β vera tvinntölur. Þá er röðin*

$$\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$$

samleitin og summa hennar er gefin með

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Sönnun. Við skrifum

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_n + \beta \sum_{k=1}^{n} b_n.$$

Við höfum að

$$\lim_{n\to\infty}\left(\alpha \sum_{k=1}^{n} a_n + \beta \sum_{k=1}^{n} b_n\right) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

svo að $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_n + \beta b_n)$ er til og þar með höfum við

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_n + \beta b_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\alpha \sum_{k=1}^{n} a_n + \beta \sum_{k=1}^{n} b_n\right)\\ &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\end{aligned}$$

□

Þegar við erum að fást við raðir er það tvennt sem við höfum aðallega áhuga á. Í fyrsta lagi það hvort röðin sé samleitin og í öðru lagi hver sé summan ef röðin er samleitin. Við skulum kanna þetta nánar. Athugum fyrst rauntalnaraðir *með engum neikvæðum liðum.*

Ef $\sum a_n$ er rauntalnaröð með engum neikvæðum liðum þ.e. $a_n \geq 0$ fyrir öll n þá er hlutsummurunan $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ vaxandi vegna þess að

$$s_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

fyrir öll n. Til að skera úr um samleitni raðarinnar er því nóg samkvæmt setningu 2.2.11 að athuga hvort hlutsummurunan $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ sé takmörkuð. Þetta gefur tilefni til fyrsta samleitniprófsins sem við setjum fram.

Setning 2.3.5 (Samanburðarpróf)**.** *Látum* $\sum a_n$ *og* $\sum b_n$ *vera rauntalnaraðir og gerum ráð fyrir því að*

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \textit{fyrir öll } n.$$

Þá er $\sum a_n$ *samleitin ef* $\sum b_n$ *er samleitin.*

Sönnun. Látum $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ og $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Gerum ráð fyrir að $\sum b_n$ sé samleitin með markgildi B. Þá er $t_n \leq B$ fyrir öll n vegna þess að $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ er vaxandi og $t_n \to B$. Þar sem

$$s_n \leq t_n \leq B \qquad \text{fyrir öll } n$$

þá er $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ vaxandi takmörkuð runa og þar með samleitin samkvæmt setningu 2.2.11. □

Athugasemdir. (i) Setningin segir einnig að ef $\sum a_n$ er ósamleitin þá er $\sum b_n$ líka ósamleitin.
(ii) Setningin hér að framan er líka rétt þótt bara sé vitað að

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

frá og með einhverju tilteknu númeri n_0.

Dæmi 2.3.6.

$$\sum \frac{1}{2^n + 1}$$

er samleitin vegna þess að $\sum \frac{1}{2^n}$ er samleitin og vegna þess að $\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$ fyrir öll $n \geq 1$.

Annað próf sem svipar til samanburðarprófsins er hið svokallaða markgildissamanburðarpróf.

Setning 2.3.7 (Markgildissamanburðarpróf)**.** *Látum* $\sum a_n$ *og* $\sum b_n$ *vera rauntalnaraðir með engum neikvæðum liðum.*

Ef markgildið

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

er til og ef $L > 0$ *þá eru raðirnar annað hvort báðar samleitnar eða báðar ósamleitnar.*

Sönnun. Þar sem $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ og $L > 0$ þá er til tala N þannig að

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \frac{L}{2} \qquad \text{fyrir öll } n \geq N.$$

þ.e.a.s.

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2} \qquad \text{fyrir öll } n \geq N.$$

Þar með er

$$a_n < \frac{3L}{2} b_n \quad \text{og} \quad b_n < \frac{2}{L} a_n \qquad \text{fyrir öll } n \geq N.$$

Þar sem röðin $\sum \frac{3L}{2} b_n$ er samleitin ef $\sum b_n$ er samleitin og þar sem $\sum \frac{2}{L} a_n$ er samleitin ef $\sum a_n$ er samleitin þá sýnir fyrsta samanburðarprófið ásamt athugasemd við það, að raðirnar eru annað hvort báðar samleitnar eða báðar ósamleitnar. □

Til þess að hafa gagn af samanburðarprófunum þurfum við að eiga til samanburðar forða af röðum sem við vitum um hvort eru samleitnar eða ósamleitnar. Við munum hér og í seinni köflum smám saman bæta í sarpinn.

Dæmi 2.3.8. Röðin $\sum \dfrac{1}{4n^2 - 1}$ er samleitin.

Úrlausn. Til þess að gera okkur grein fyrir því skulum við umrita n-ta lið rununnar:

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Þessi umritun auðveldar okkur að reikna $n$tu hlutsummuna út:

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \\
&= \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

svo að $\lim s_n = \frac{1}{2}$ og þar með er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

Þessi röð er dæmi um röð, sem oft er kölluð *kíkisröð*. Röð $\sum a_n$ kallast kíkisröð ef til er runa $(b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$ þannig að $a_n = b_n - b_{n-1}$. Þá er einfalt að reikna út n-tu hlutsummuna:

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \cdots + (b_n - b_{n-1}) = b_n - b_0$$

svo að $\sum a_n$ er samleitin ef og aðeins ef $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ er samleitin. Með samanburði við $\sum \frac{1}{4n^2-1}$ fæst nú að röðin $\sum \frac{1}{4n^2}$ er samleitin og þar með að $\sum \frac{1}{n^2}$ er samleitin.

Snúum okkur nú að annars konar röðum en röðum með engum neikvæðum liðum. Hér kemur fyrst eitt próf um ósamleitni.

Setning 2.3.9. *Látum $\sum a_n$ vera röð. Ef $\lim a_n \neq 0$ þá er röðin ósamleitin.*

Sönnun. Látum $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ tákna hlutsummurununa. Nú er $a_n = s_n - s_{n-1}$ ef $n \geq 2$. Setjum $t_1 = 0$ og $t_n = s_{n-1}$ ef $n \geq 2$. þá er $a_n = s_n - t_n$ fyrir öll n. Við beitum nú óbeinni sönnun. Hugsum okkur að röðin sé samleitin þ.e. að $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ sé samleitin segjum $\lim s_n = S$. Þá er líka $\lim t_n = S$ svo að

$$\lim a_n = \lim(s_n - t_n) = \lim s_n - \lim t_n = S - S = 0$$

sem er í mótsögn við hið gefna. Röðin getur því ekki verið samleitin. $\square$

Aðvörun. Setninguna hér á undan má einnig umorða svona:

$$\text{Ef } \sum a_n \text{ er samleitin þá er } \lim a_n = 0.$$

Með öðrum orðum er skilyrðið $\lim a_n = 0$ *nauðsynlegt* skilyrði þess að röðin $\sum a_n$ sé samleitin. Skilyrðið $\lim a_n = 0$ er hins vegar *ekki nægjanlegt* til að tryggja samleitni raðarinnar $\sum a_n$ eins og fram kemur í setningu 2.3.12.

Í skilgreiningunum og dæmunum um runur og raðir þá byrjuðum við ávallt á að númera með 1. Við hefðum alveg eins getað byrjað á að númera með 2, 3 eða jafnvel 0 sem stundum er handhægt, sérstaklega í dæmum með geómetrískum röðum.

Skilgreining 2.3.10. Látum z vera tvinntölu. Röðin

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

kallast *geómetrísk röð.*

Við höfum:

Setning 2.3.11. *Geómetríska röðin*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

er samleitin ef $|z| < 1$ *en ósamleitin ef* $|z| \geq 1$. *Ennfremur þá er*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \text{ef } |z| < 1.$$

Sönnun. Ef $|z| \geq 1$ þá er $\lim_{n\to\infty} z^n \neq 0$ svo að samkvæmt setningu 2.3.9 getur röðin $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ekki verið samleitin.

Gerum nú ráð fyrir að $|z| < 1$. Við ákvörðum hlutsummurununa $(s_n)_{n=0}^{\infty}$:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{z^n}{1-z}.$$

Svo að

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z} \cdot \lim_{n\to\infty} z^n$$

Þar sem $|z| < 1$ þá er $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ svo að $\lim_{n\to\infty} s_n = 1/(1-z)$, þ.e.a.s., röðin er samleitin með summu $1/(1-z)$. □

Ef z er rauntala sem fullnægir ójöfnunum $0 \leq z < 1$ þá er geómetríska röðin $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ samleitin. Með þessum hætti fæst fjöldi raða til samanburðar.

Í dæminu hér að ofan fengum við samtímis niðurstöðu um samleitni og sjálfa summuna. Það getur oft verið örðugt að ákvarða summuna þótt vitað sé að röðin sé samleitin. Til þess eru þó ýmsar aðferðir t.d. sú að reikna s_n út með aðstoð tölvu og reyna að meta frávik s_n frá sjálfri summunni.

Setning 2.3.12. *Röðin* $\sum \frac{1}{n}$ *er ósamleitin.*

Sönnun. Við skulum reyna að meta stærð n-tu hlutsummunnar s_n fyrir slétt númer n.

$$\begin{aligned}
s_{2k} &= \sum_{j=1}^{2k} \frac{1}{j} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2k-1} \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2k} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} \\
&= s_k + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ef k er líka slétt tala segjum $k = 2p$ þá fæst að

$$s_{2k} > s_k + \frac{1}{2} = s_{2p} + \frac{1}{2} > s_p + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = s_p + 1$$

þ.e.a.s.

$$s_{2^2 p} > s_p + 2 \cdot \frac{1}{2}$$

Ef p er líka slétt tala segjum $p = 2q$ þá fæst að

$$s_{2^3 q} > s_{2q} + 2 \cdot \frac{1}{2} > s_q + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = s_q + 3 \cdot \frac{1}{2}$$

og almennt gildir

$$s_{2^m} > 1 + m \cdot \frac{1}{2}.$$

Þetta sýnir að hlutsummurunan $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ er ótakmörkuð og röðin er því ósamleitin. $\square$

Nú hefur ný ósamleitin röð bæst í sarpinn. Hana má nota til samanburðar.

Dæmi 2.3.13. Raðirnar $\sum \frac{1}{2n}$ og $\sum \frac{1}{2n-1}$ eru ósamleitnar

Úrlausn. Þar sem $\sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{n}$ þá er hún ósamleitin. Þar sem $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$ þá er $\sum \frac{1}{2n-1}$ ósamleitin.

Næst skulum við ræða svonefndar *víxlraðir* lítillega.

Skilgreining 2.3.14. Röð af gerðinni $\sum(-1)^{n+1}a_n$ eða $\sum(-1)^n a_n$ þar sem $a_n > 0$ fyrir öll n kallast *víxlröð*, með öðrum orðum röð, þar sem formerki liðanna skiptast á.

Setning 2.3.15. *Röðin* $\sum(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ *er samleitin.*

Sönnun. Athugum fyrst hlutsummur með slétt númer:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \end{aligned}$$

þar sem tölurnar í hverjum sviga eru jákvæðar þá er runan $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ þar sem $t_n = s_{2n}$ fyrir öll n vaxandi. Ennfremur þá er

$$s_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2n}.$$

Þar sem tölurnar í hverjum sviga eru jákvæðar þá er

$$s_{2n} < 1 \qquad \text{fyrir öll } n$$

Runan $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ er vaxandi og takmörkuð og þar með samleitin samkvæmt setningu 2.2.11, segjum

$$\lim t_n = S.$$

Nú er $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1}$ þannig að ef $u_n = s_{2n+1}$ fyrir öll n þá er runan (u_n) samleitin og

$$\lim u_n = S$$

og þar með er

$$\lim s_n = S.$$

□

Með því að fylgja sönnunni hér að ofan má leiða eftirfarandi setningu út.

Setning 2.3.16 (Víxlraðarpróf)**.** *Látum* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *vera minnkandi rauntalnarunu með markgildi* 0, *(þ.e.* $a_{n+1} \leq a_n$ *fyrir öll* n *og* $\lim a_n = 0$*). Þá er víxlröðin*

$$\sum (-1)^{n+1} a_n$$

samleitin.

Ef n-ta hlutsumman er notuð til að nálga summu víxlraðar þá er til einfalt mat á skekkjunni.

Setning 2.3.17. *Látum* $\sum(-1)^{n+1}a_n$ *þar sem* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *er minnkandi runa með markgildi 0 vera samleitna víxlröð með summu* S*. Látum* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *vera hlutsummurunu raðarinnar. Þá er*

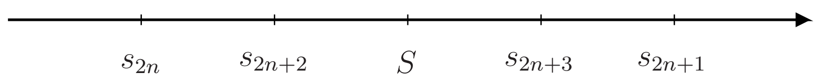
$$|s_n - S| \leq a_{n+1} \qquad \textit{fyrir öll } n.$$

Sönnun. Athugum hlutsummur með oddatölunúmerum:

$$\begin{aligned} s_{2n+3} &= s_{2n+1} + (-1)^{2n+3} a_{2n+2} + (-1)^{2n+4} a_{2n+3} \\ &= s_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} \\ &= s_{2n+1} - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \\ &\leq s_{2n+1}. \end{aligned}$$

Runan $(s_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ er því minnkandi og hefur markgildi S. Þar sem runan $(s_{2n})_{n=1}^{\infty}$ er vaxandi með markgildi S sést, að

$$s_{2n} \leq s_{2n+2} \leq S \leq s_{2n+3} \leq s_{2n+1} \tag{1}$$



Mynd 2.4:

Þar sem

$$a_{k+1} = |s_{k+1} - s_k|$$

þá fáum við úr (1)

$$|S - s_k| \leq |s_{k+1} - s_k| = a_{k+1}.$$

□

Dæmi 2.3.18. Ef finna á summu raðarinnar

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

með þriggja aukastafa nákvæmni þá nægir að taka summu 1000 fyrstu liðanna. Því að ef summan er kölluð S (hún er raunar $\log 2$, en það kemur í ljós síðar) þá gildir samkvæmt setningunni hér á undan að

$$\left|S-\sum_{n=1}^{1000}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|<\frac{1}{1001}.$$

Ef hins vegar á að finna summu raðarinnar

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^3}$$

með þriggja aukastafa nákvæmni þá nægir að taka 10 fyrstu liðina.

Hvernig á að kanna samleitni raða sem ekki eru af þeim gerðum sem við höfum athugað hér á undan t.d. rauntalnaraðir þar sem formerki liðanna virðast breytast óreglubundið eða þá tvinntalnaraðir? Úr sérhverri röð má búa til röð með engum neikvæðum liðum. Fyrir gefna röð

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

getum við myndað röð tölugildanna

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

Þetta er röð með engum neikvæðum liðum og við getum reynt að beita einhverjum af þeim tækjum sem við höfum þegar þróað til að kanna samleitni hennar.

Skilgreining 2.3.19. Röð $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ er sögð *alsamleitin* ef röð tölugildanna $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ er samleitin.

Alsamleitni er sterkara skilyrði en samleitni eins og fram kemur í næstu setningu.

Setning 2.3.20. *Ef röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er alsamleitin þá er hún líka samleitin.*

Sönnun. Við skiptum sönnuninni í tvö tilfelli. Ef $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er rauntalnaröð þá búum við til tvær nýjar raðir á eftirfarandi hátt. Við setjum

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{ef } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{ef } a_n < 0 \end{cases}$$

og

$$c_n = \begin{cases} -a_n & \text{ef } a_n \leq 0 \\ 0 & \text{ef } a_n > 0 \end{cases}$$

Við höfum

$$0 \leq b_n \leq |a_n| \quad \text{og} \quad 0 \leq c_n \leq |a_n| \qquad \text{fyrir öll } n$$

svo samkvæmt setningu 2.3.5 eru raðirnar $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ samleitnar. Þar með er röðin $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - c_n)$ líka samleitin samkvæmt setningu 2.3.4. En

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Látum nú $\sum a_n$ vera alsamleitna tvinntalnaröð. Úr þessari röð búum við til tvær rauntalnaraðir, raunhlutaröðina og þverhlutaröðina.

$$\sum \operatorname{Re} a_n \quad \text{og} \quad \sum \operatorname{Im} a_n$$

Nú er $|\operatorname{Re} a_n| \leq |a_n|$ og $|\operatorname{Im} a_n| \leq |a_n|$. Svo samkvæmt setningu 2.3.5 eru raðirnar $\sum |\operatorname{Re} a_n|$ og $\sum |\operatorname{Im} a_n|$ samleitnar. Það er að segja $\sum \operatorname{Re} a_n$ og $\sum \operatorname{Im} a_n$ eru báðar alsamleitnar og þar með samleitnar samkvæmt fyrri hluta sönnunarinnar. En þá er röðin

$$\sum a_n = \sum(\operatorname{Re} a_n + i \operatorname{Im} a_n)$$

líka samleitin samkvæmt setningu 2.3.4. $\square$

Dæmi 2.3.21. Röðin $\sum \frac{1}{n^2} \sin n$ er alsamleitin og þar með samleitin vegna þess að

$$\left| \frac{1}{n^2} \sin n \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

og vegna þess að röðin $\sum \frac{1}{n^2}$ er samleitin.

Aðvörun. Samleitni er veikara skilyrði en alsamleitni. Röðin

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

er samleitin en röð tölugildanna

$$\sum \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$$

er ósamleitin samkvæmt setningu 2.3.12.

Skilgreining 2.3.22. Röð sem er samleitin án þess að vera alsamleitin er sögð vera *skilorðsbundið samleitin* eða *skilyrt samleitin.*

Við setjum fram tvö próf til viðbótar í þessum kafla um alsamleitni (og þar með líka að sjálfsögðu um samleitni raða með engum neikvæðum liðum).

Setning 2.3.23 (Kvótapróf)**.** *Látum $\sum a_n$ vera röð. Ef markgildið*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

er til þá er röðin $\sum a_n$

(i) *alsamleitin ef $\rho < 1$*

(ii) *ósamleitin ef $\rho > 1$*

Hins vegar gildir

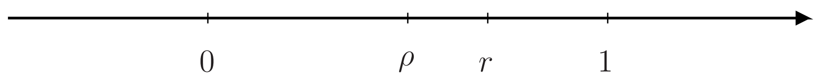
(iii) *ef $\rho = 1$ þá gefur prófið engar upplýsingar.*

Sönnun. (i) Ef $\rho < 1$ þá veljum við tölu r þannig að $\rho < r < 1$. Samkvæmt skilgreiningu á markgildi þá er til númer N þannig að

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < r \qquad \text{fyrir öll } n \geq N.$$

Þar með er

$$|a_{n+1}| \leq r\,|a_n| \qquad \text{fyrir öll } n \geq N.$$



Mynd 2.5:

Ef $n = N + p$ þá fæst úr þessari ójöfnu að

$$|a_{N+p}| \leq r\,|a_{N+p-1}| \leq r^2\,|a_{N+p-2}| \leq \cdots \leq r^p\,|a_N|\,.$$

Þetta sýnir að við getum borið röðina $\sum |a_n|$ saman við geómetríska röð frá og með tilteknu númeri.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N+q} |a_k| &= \sum_{k=1}^{N} |a_k| + \sum_{k=N+1}^{N+q} |a_k| \\
&= \sum_{k=1}^{N} |a_k| + \sum_{p=1}^{q} |a_{N+p}| \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} |a_k| + \sum_{p=1}^{q} r^p\,|a_N| \\
&= \sum_{k=1}^{N} |a_k| + |a_N|\,\frac{r - r^{q+1}}{1-r} \\
&< M + |a_N|\,\frac{r}{1-r} \qquad \text{fyrir öll } q \geq 1
\end{aligned}$$

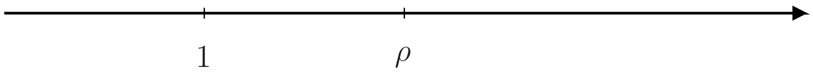
þar sem M er fastinn

$$M = \sum_{k=1}^{N} |a_k|\,.$$

Ef við setjum $M_1 = M + |a_N|\,\frac{r}{1-r}$ þá sýna þessir útreikningar að röðin $\sum |a_n|$ sem hefur enga neikvæða liði hefur takmarkaða hlutsummurunu og er því samleitin samkvæmt setningu 2.2.11.

(ii) Ef $\rho > 1$ þá er til N þannig að

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \qquad \text{fyrir öll } n \geq N$$



Mynd 2.6:

og þar með er

$$|a_{n+1}| \geq |a_n| \qquad \text{fyrir öll } n \geq N.$$

En þá er $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ svo að röðin er ósamleitin samkvæmt setningu 2.3.9 (Athugið að $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ef og aðeins ef $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$).
(iii) Hvað varðar tilfellið $\rho = 1$ þá lítum við á raðirnar $\sum \frac{1}{n^2}$ og $\sum \frac{1}{n}$. Um þá fyrri gildir

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} \to 1$$

og um þá seinni gildir að

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$$

svo að $\rho = 1$ fyrir báðar raðirnar. En sú fyrri er samleitin og sú síðari ósamleitin.

□

Dæmi 2.3.24. Röðin $\sum (-1)^n \frac{n}{2^n}$ er alsamleitin vegna þess að

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)2^n}{(-1)^n n 2^{n+1}}\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$

Hér hefði mátt reyna að beita víxlraðarprófi til að kanna samleitni, en það hefði hins vegar ekki gefið okkur upplýsingar um alsamleitni.

Næsta próf er nokkuð áþekkt því fyrra.

Setning 2.3.25 (Rótarpróf)**.** *Látum $\sum a_n$ vera röð. Ef markgildið*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

er til þá er röðin $\sum a_n$

(i) *alsamleitin ef $\rho < 1$*

(ii) *ósamleitin ef* $\rho > 1$
Hins vegar gildir
(iii) *Ef* $\rho = 1$ *þá gefur rótarprófið engar upplýsingar.*

Sönnun. (i) Ef $\rho < 1$ þá veljum við tölu r þannig að $\rho < r < 1$. Eins og í kvótaprófinu þá er til tala N þannig að

$$\sqrt[n]{|a_n|} < r \qquad \text{fyrir öll } n \geq N$$

og þar með er

$$|a_n| < r^n \qquad \text{fyrir öll } n \geq N.$$

Með samanburði við geómetrísku röðina $\sum r^n$ fæst því að $\sum |a_n|$ er samleitin.
(ii) Ef $\rho > 1$ þá er til N þannig að

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \qquad \text{fyrir öll } n \geq N$$

og þar með er

$$|a_n| \geq 1 \qquad \text{fyrir öll } n \geq N.$$

En þá er $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ svo að röðin er ósamleitin.
(iii) Við athugum að lokum raðirnar $\sum \frac{1}{n^2}$ og $\sum \frac{1}{n}$. Um þá fyrri gildir að

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 \to 1^2 = 1$$

og um þá seinni gildir að

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$$

hvort tveggja samkvæmt markgildum síðast í grein 2.2. Í báðum tilfellum er $\rho = 1$, en sú fyrri er samleitin, sú síðari ósamleitin.

□

Athugasemd. Ef sannanirnar á setningunum tveim hér á undan eru skoðaðar nánar þá sést að veikja má skilyrðin og fá eftirfarandi niðurstöður:
(i) Ef til er $r < 1$ og tala N þannig að

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \qquad \text{fyrir öll } n \geq N$$

eða ef

$$\sqrt[n]{|a_n|} < r \qquad \text{fyrir öll } n \geq N$$

þá er röðin $\sum a_n$ alsamleitin.

(ii) Ef til er N þannig að

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \qquad \text{fyrir öll } n \geq N$$

eða ef

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \qquad \text{fyrir öll } n \geq N$$

þá er röðin $\sum a_n$ ósamleitin.

Dæmi 2.3.26. Röðin

$$\sum \left(\frac{\sin n}{n}\right)^n$$

er alsamleitin vegna þessa að

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{\sin n}{n}\right|^n} = \frac{|\sin n|}{n} \to 0.$$

Hver er þá aðferðin við að kanna samleitni tiltekinnar raðar $\sum a_n$? Við byrjum á því að búa til röð tölugildanna $\sum |a_n|$. Á þessa röð getum við beitt ýmsum prófum t.d. samanburðarprófi eða rótarprófi. Jákvæð niðurstaða gefur okkur að röðin er alsamleitin og þar með samleitin. Ef úr þessum prófum fæst að $\sum |a_n|$ er ósamleitin þá getum við reynt að athuga hvort t.d. $\sum a_n$ er víxlröð og beita þá víxlraðarprófi eða þá athugað hvort um kíkisröð er að ræða. Þetta má líka gera þótt engin niðurstaða fáist úr prófum á $\sum |a_n|$.

Hvernig má svo ákvarða sjálfa summuna þegar komið hefur fram að röðin $\sum a_n$ sé samleitin? Það getur oft verið erfitt eða jafnvel ógerlegt. Við getum athugað hvort röðin er geómetrísk röð eða kíkisröð, þá er auðvelt að ákvarða summuna, eða sett saman úr slíkum. Við getum líka reynt að meta frávik hlutsummanna frá summunni S með tölulegum útreikningum, og nálga þannig S, eins og t.d. má gera fyrir víxlraðir.

Við skulum enda þennan kafla á því að ræða lítillega óendanleg markgildi. Um sumar rauntalnarunur gildir að liðirnir stækka upp úr öllu valdi með vaxandi númerum, við segjum að slíkar runur stefni á óendanlegt eða plús óendanlegt. Við skulum setja þetta nákvæmlega fram:

Skilgreining 2.3.27. Rauntalnarunan $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ er sögð *stefna á óendanlegt* skrifað

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty \quad \text{eða bara} \quad \lim t_n = \infty$$

ef fyrir hversu stóra tölu M sem er má finna tölu N þannig að

$$t_n > M \qquad \text{fyrir öll } n \geq N$$

Dæmi 2.3.28. $\lim n^2 = \infty$

Á tilsvarandi hátt skilgreinum við hvað það merkir að runa stefni á mínus óendanlegt skrifað $\lim t_n = -\infty$.

Athugasemd. Ef (t_n) er runa með engum núllliðum þá er $\lim t_n = \pm\infty$ jafngilt því að $\lim(1/t_n) = 0$.

Setning 2.3.29. *Látum (t_n) vera vaxandi rauntalnarunu. Þá er runan annað hvort samleitin eða $\lim t_n = \infty$.*

Sönnun. Annað hvort er runan takmörkuð eða ótakmörkuð. Ef hún er takmörkuð þá er hún samleitin samkvæmt setningu 2.2.11. Ef runan (t_n) er ótakmörkuð þá má fyrir hversu stóra tölu M sem er finna númer N þannig að $t_N > M$ og þar með $t_n > M$ fyrir öll $n \geq N$ vegna þess að runan er vaxandi, svo að $\lim t_n = \infty$. □

Ef $\sum a_n$ er rauntalnaröð sem hefur enga neikvæða liði þá er hlutsummurunan (s_n) vaxandi. Ef röðin $\sum a_n$ er ósamleitin þá er $\lim s_n = \infty$ samkvæmt setningunni hér að ofan. Þetta setjum við stundum fram á eftirfarandi hátt: $\sum a_n = \infty$. Þannig getum við skrifað

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Verkefni 2.3

Í dæmum 1-19 skal ákvarða hvort raðirnar séu samleitnar og finna summuna þar sem við á.

1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{3^n}$

2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n$

3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{3}{\pi})^{n-1}$

4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{5^n}$

5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

6 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{10^n}$

7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{n}-\frac{1}{2^n})$

8 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+(\frac{9}{10})^n}$

9 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{2}{3^n})$

10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n+5^n}{3^n}$

11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

12 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}-7\cdot 5^n}{11^n}$

13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

14 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{16n^2-8n-3}$

15 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$

16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

17 $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{4\cdot 6}+\dots$

18 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

19 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$

Í dæmum 20-24 skal skrifa tugabrotin sem almenn brot.

20 $0.222222\dots$

21 $0.307307307\dots$

22 $7.1465465465\dots$

23 $0.249999\dots$

24 $0.999999\dots$

Í dæmum 25-28 skal ákvarða fyrir hvaða rauntölur x raðirnar eru samleitnar og finna gildi summunnar fyrir þau x.

25 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x-3)^n$

26 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{x^{n+1}}$

27 $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$

28 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin x$

29 Látum $\sum a_n$ vera samleitna röð og $\sum b_n$ vera ósamleitna röð. Sýnið að röðin $\sum(a_n + b_n)$ sé ósamleitin.

30 Athugum röðina

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

(a) Reiknið hlutsummurnar s_1, s_2 og s_3.

(b) Giskið á almenna formúlu fyrir s_n og gerið grein fyrir að hún sé rétt.

(c) Sýnið að röðin sé samleitin og finnið summu hennar.

Í dæmum 31-42 skal ákvarða hvort raðirnar séu samleitnar eða ósamleitnar.

31 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

37 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n}{n+3^n}$

32 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n2^n}$

38 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4+\sqrt{n}}$

33 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

39 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+7n}{3^n(n^2+5n-1)}$

34 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+5^n}{4^n}$

40 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8n^2-3n}}$

35 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{2^n}$

41 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

36 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

42 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$

43 Sýnið að röðin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$$

sé samleitin.

44 Látum $\sum a_n$ og $\sum b_n$ vera raðir þannig að $a_n \geq 0$ og $b_n > 0$. Sannið eftirfarandi fullyrðingar.

(a) Ef $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ og $\sum b_n$ er samleitin, þá er $\sum a_n$ samleitin.

(b) Ef $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ og $\sum b_n$ er ósamleitin, þá er $\sum a_n$ ósamleitin.

45 (a) Látum $\sum a_n$ vera samleitna röð sem hefur enga neikvæða liði og $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ vera takmarkaða runu sem hefur enga neikvæða liði. Sýnið að röðin $\sum a_n c_n$ er samleitin.

(b) Látum $\sum a_n$ og $\sum b_n$ vera samleitnar raðir sem hafa enga neikvæða liði. Sýnið að röðin $\sum a_n b_n$ sé samleitin.

(c) Finnið dæmi um samleitnar raðir $\sum a_n = A$ og $\sum b_n = B$ þannig að röðin $\sum a_n b_n$ sé samleitin en $\sum a_n b_n \neq AB$.

Í dæmum 46-51 skal úrskurða hvort raðirnar séu samleitnar.

46 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

47 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{5n+1}$

48 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

49 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$

50 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^4}$

51 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

Í dæmum 52-54 skal finna náttúrlega tölu n þannig að $|s - s_n| < 0.0005$.

52 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

53 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$

54 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$

Nálgið eftirfarandi summur með þriggja aukastafa nákvæmni.

55 $\cos(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

56 $\frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

57 Nálgið summu raðarinnar

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

með skekkju minni en 0.01. Notið tilheyrandi hlutsummu og skekkjumat til þess að sýna að

$$3.13 < \pi < 3.15.$$

Í dæmum 58-77 skal ákvarða hvort raðirnar séu alsamleitnar, skilyrt samleitnar eða ósamleitnar.

58 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

59 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

60 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

61 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3}$

62 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)$

63 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n!}$

64 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^2}{(2n)!}$

65 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

66 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 3^{n+1}}$

67 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

68 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 7^n}{(n-1)^3 6^{n+3}}$

69 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-10)^n}$

70 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(-\pi)^{n+1}}$

71 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

72 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}$

73 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n(2^n+1)}$

74 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$

75 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$

76 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n! 10^n}$

77 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n+1)! - n!}{(n+3)!}$

78 Finnið dæmi um samleitnar raðir $\sum a_n$ og $\sum b_n$ þannig að röðin $\sum a_n b_n$ sé ósamleitin.

79 Sýnið að um sérhverja alsamleitna röð $\sum a_n$ gildi ójafnan

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

80

(a) Látum r vera rauntölu og $|r| < 1$. Sýnið að röðin $\sum_{n=0}^{\infty} nr^n$ sé samleitin.

(b) Sýnið að $(1-r)S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ þar sem S er summa raðarinnar í a-lið og ályktið út frá því að

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$$

81 Látum $\sum a_n$ vera rauntalnaröð og skilgreinum raðir $\sum a_n^+$ og $\sum a_n^-$ með

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \text{ og } a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}.$$

(a) Sýnið að raðirnar $\sum a_n^+$ og $\sum a_n^-$ séu báðar samleitnar ef röðin $\sum a_n$ er alsamleitin.

(b) Sýnið að raðirnar $\sum a_n^+$ og $\sum a_n^-$ séu báðar ósamleitnar ef röðin $\sum a_n$ er skilyrt samleitin.

Kafli 3

Samfelldni

Þegar fræðimenn fyrri alda (nánar til tekið sautjándu aldar) vildu lýsa því að fall væri samfellt, þá sögðu þeir að fallrit (graf) þess væri óslitið. Með auknum framförum í eðlisfræði og stærðfræði jókst þörfin fyrir nákvæmari skilgreiningu á hugtakinu *samfelldni*, en það var ekki fyrr en á öndverðri 19. öld að settar voru fram nægilega nákvæmar skilgreiningar á því. Þær byggja á hinu mikilvæga hugtaki *markgildi* og er grein 3.1 helguð því. Í grein 3.2 fjöllum við síðan um eiginleika samfelldra falla.

3.1 Markgildi falla

Við hefjum þessa grein á skilgreiningu á markgildi falls í punkti. Þar sem hugtakið er svo mikilvægt setjum við fram, í lok greinarinnar, fleiri jafngildar skilgreiningar á hugtakinu.

Skilgreining 3.1.1 (1. útgáfa)**.** Látum I vera opið bil, c vera punkt á I og f vera raungilt fall skilgreint á I, nema e.t.v. ekki í c. Við segjum að $f(x)$ stefni á tiltekna tölu L, að f hafi markgildið L, þegar x stefnir á c, skrifað

$$\lim_{x\to c} f(x) = L, \text{ líka skrifað } f(x) \to L \text{ þegar } x \to c$$

ef f sendir sérhverja runu af punktum úr $I \setminus \{c\}$ með markgildi c í runu með markgildi L, þ.e.a.s. ef

$$\lim x_n = c \text{ þá er } \lim f(x_n) = L.$$

Nánar tiltekið, ef $x_n \to c$ þá má fyrir sérhverja náttúrulega tölu k finna númer N þannig að $|f(x_n) - L| < 10^{-k}$ fyrir öll $n \geq N$.

Eða sett fram með aukastöfum, fyrir sérhverja náttúrulega tölu k finna númer N þannig að $f(x_n)$ er eins og L að k-ta aukastaf fyrir öll $n \geq N$.

Dæmi 3.1.2. Fastaföll, þ.e föll sem taka bara eitt gildi, hafa markgildi í öllum punktum. Tökum annað einfalt dæmi. Lát $f(x) = x$ fyrir x í $\mathbb{R}$. Þá gildir að ef $\lim x_n = c$ þá er $\lim f(x_n) = c$. Með því að nota regluna um að margfeldi samleitinna runa stefni á margfeldi markgildanna sést að ef $\lim x_n = c$ þá er $\lim g(x_n) = c^2$ ef $g(x) = x^2$ fyrir x í $\mathbb{R}$.

Skilgreining 3.1.3. Við segjum að fall f skilgreint á opnu bili I sé *samfellt* í punkti c úr bilinu ef f hefur markgildið $f(c)$ í punktinum c. Við segjum að f sé samfellt á opna bilinu I ef f er samfellt í öllum punktum bilsins

Við viljum líka geta sagt hvað það merkir að fall sé samfellt á lokuðu bili $[a, b]$. Til þess þurfum við að skilgreina markgildi frá vinstri og hægri.

Skilgreining 3.1.4. Við segjum að runa (s_n) stefni á L frá hægri ef $s_n \geq L$ fyrir öll n og $\lim s_n = L$.

Lát I vera bil og c vera punkt úr bilinu. Við segjum að fall f sem er skilgreint fyrir öll x úr I sem uppfylla $x \geq c$ hafi markgildið L frá hægri í c ef f sendir runu sem stefnir á c frá hægri í runu sem stefnir á L. Þetta er skrifað þannig,

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L \text{ eða } f(x) \to L \text{ þegar } x \to c^+.$$

Ef f er skilgreint í punktinum c og $f(x) \to f(c)$ þegar $x \to c^+$ þá segjum við að f sé samfellt frá hægri í c.

Tilsvarandi skilgreiningar gefa markgildi frá vinstri.

Skilgreining 3.1.5. Fall f skilgreint á lokuðu bili $[a, b]$ er samfellt á bilinu ef f er samfellt á opna bilinu (a, b), samfellt frá hægri í a og frá vinstri í b.

Stundum þurfum við að athuga markgildin frá vinstri og hægri til að kanna markgildi falls í punkti, t.d. ef fallið er gefið með ólíkum forskriftum vinstra og hægra megin við punktinn. Þá kemur eftirfarandi niðurstaða að gagni.

Setning 3.1.6. *Fall f skilgreint á opnu bili hefur markgildið L í punkti c úr bilinu ef og aðeins ef f hefur markgildið L bæði frá vinstri og hægri í c.*

Sönnun. Sjá dæmi í dæmakafla. □

Það er hægt að skilgreina það að f hafi markgildið A í punktinum x_0 án þess að nota runur. Það verður skoðað í lok kaflans.

Dæmi 3.1.7. Ljóst er að fastaföll eru samfelld á hvaða bili sem er. Með þrepun og með því að nota reglur um runumarkgildi fæst svo að allar margliður, þ.e.a.s. öll föll af gerðinni $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$ þar sem n er náttúruleg tala og $c_0, c_1, \ldots, c_n$ eru gefnar rauntölur, eru samfelldar í hvaða punkti sem vera skal. Ennfremur eru með sömu rökum öll *ræð* föll, þ.e.a.s. föll af gerð $f(x) = p(x)/q(x)$ þar sem p og q eru margliður, samfelld í öllum punktum þar sem fallið f er skilgreint, þ.e. öllum punktum x, þar sem $q(x) \neq 0$.

Samsett samfelld föll eru samfelld. Lát f vera samfellt fall á bili I sem tekur gildi á bili J og lát g vera fall á bilinu J. Samsetta fallið $g \circ f$ er skilgreint á I sem $g \circ f(x) = g(f(x))$. Ef f er samfellt í punkti x_0 og g er samfellt í $y_0 = f(x_0)$ þá er $g \circ f$ samfellt í x_0. Því, lát $\lim x_n = x_0$. Þá er $\lim f(x_n) = f(x_0) = y_0$ vegna samfelldni f og þar með er $\lim g(f(x_n)) = g(y_0) = g(f(x_0))$ vegna samfelldni g. Þ.e.a.s. $\lim(g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(x_0)$.

Næsta setning er hliðstæða við tilsvarandi setningar um runur, setningar 2.2.13 og 2.2.14, og sönnunin er bein skírskotun í þessar setningar.

Setning 3.1.8. *Ef* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *og* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, *þá er*

(i)
$$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = L + M.$$

Þetta má líka setja þannig fram:

$$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

ef bæði markgildin hægra megin eru til.

(ii)
$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = L \cdot M.$$

Þetta má einnig setja fram á eftirfarandi hátt:

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

ef bæði markgildin hægra megin eru til. Ef g tekur ekki gildið 0 og ef $\neq 0$ *þá er*

(iii)
$$\lim_{x\to a}(f/g)(x) = L/M.$$
Þetta má einnig setja fram á eftirfarandi hátt:
$$\lim_{x\to a}(f/g)(x) = \lim_{x\to a} f(x)/\lim_{x\to a} g(x)$$
ef bæði markgildin hægra megin eru til, g tekur ekki gildið 0 og $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

(iv) *Ef $f(x) \geq 0$ fyrir öll x þá er $l \geq 0$. Þessa fullyrðingu má líka orða þannig: $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$ ef $f(x) \geq 0$ fyrir öll x.*

(v) **(Klemmuregla)** *Látum I vera opið bil og $a \in I$. Látum f, g og h vera föll sem skilgreind eru á I, nema hugsanlega í a. Ef $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ og $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} h(x)$, þá er $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.*

Sönnun. Lát $x_n \to a$. Þá er
$$\lim_{x_n\to a}(f \pm g)(x_n) = \lim_{x_n\to a}(f(x_n) \pm g(x_n)) = \lim_{x_n\to a} f(x_n) \pm \lim_{x_n\to a} g(x_n) = L + M$$
samkvæmt reglum um runumarkgildi. Aðrar staðhæfingar í setningunni eru sannaðar á svipaðan hátt með tilvísun í reglur um runumarkgildi. □

Við endum greinina á (jafngildum) skilgreiningum á markgildi falls.

Skilgreining 3.1.9 (2. útgáfa)**.** Lát I vara bil í $\mathbb{R}$, x_0 vera punkt úr bilinu og f vera fall skilgreint á bilinu nema e.t.v. í x_0 og A vera tölu. Við segjum að fallið f hafi *markgildið* A í punktinum x_0 ef fyrir sérhverja náttúrulega tölu k er til númer N þannig að $f(x)$ er eins og A að k-ta aukastaf fyrir öll x sem eru eins og x_0 að N-ta aukastaf.

Gerum ráð fyrir að f hafi markgildið A í pumktinum x_0 samkvæmt 1. úgáfu skilgreiningarinnar. Ef skilyrðið í 2. útgáfu er ekki fullnægt þá er til k sem á sér ekkert N, þ.e.a.s. fyrir sérhvert númer n er til x_n sem er eins og x_0 að n-ta aukastaf en $f(x_n)$ er ekki eins og A að k-ta aukastaf. En þá hefur runan (x_n) markgildið x_0 en runan $(f(x_n))$ hefur ekki markgildið A.

Öfugt, ef f hefur markgildið A í pumktinum x_0 samkvæmt 2. úgáfu og ef $\lim x_n = x_0$ þá látum við k vera tölu og veljum N eins og í 2. útgáfu. síðan veljum við M þannig að x_n er eins og x_0 að N-ta aukastaf ef $n \geq M$. Þá er $|A - f(x_n)| < 10^{-k}$ ef $n \geq M$.

Lauslega segir skilgreiningin að fallgildin $f(x)$ séu innan tiltekinna marka frá A ef x er nógu nálægt x_0. Við getum líka sett þessa skilgreiningu fram með mati á tölugildi mismuna.

Skilgreining 3.1.10 (3. útgáfa)**.** Lát I vara bil í $\mathbb{R}$, x_0 vera punkt úr bilinu og f vera fall skilgreint á bilinu nema e.t.v. í x_0 og A vera tölu. Við segjum að fallið f hafi *markgildið* A í punktinum x_0 ef fyrir sérhverja náttúrulega tölu k er til númer N þannig að $|A - f(x)| < 10^{-k}$ f fyrir öll x sem fullnægja $|x_0 - x| < 10^{-N}$.

Sú skilgreining sem mest er notuð þegar fram í sækir er hin svokallaða ϵ-δ skilgreining, en 3. útgáfan hér að ofan er nálægt henni.

Skilgreining 3.1.11 (ϵ-δ útgáfan)**.**] Lát I vera bil í $\mathbb{R}$, x_0 vera punkt úr bilinu og f vera fall skilgreint á bilinu nema e.t.v. í x_0 og A vera tölu. Við segjum að fallið f hafi *markgildið* A í punktinum x_0 ef fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ er til önnur tala $\delta > 0$ þannig að

$$|A - f(x)| < \epsilon \text{ ef } |x_0 - x| < \delta.$$

Sýnum að fall sem fullnægir 3. útgáfu fullnægi einnig ϵ-δ útgáfunni. Látum $\epsilon > 0$ vera gefið. Veljum k þannig að $10^{-k} < \epsilon$. Síðan veljum við N svarandi tl k eins og í 3. útgáfu og setjum $\delta = 10^{-N}$. Þá er ϵ-δ útgáfunni fullnægt. Öfugt ef fall fullnægir ϵ-δ útgáfunni látum þá k vera gefið og setjum $\epsilon = 10^{-k}$. Veljum nú δ svarandi til þessa gildis á ϵ og síðan N þannig að $10^{-N} < \delta$.

Verkefni 3.1

Í dæmum 1-10 skal annað hvort finna markgildin eða gera grein fyrir að þau séu ekki til.

1 $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

2 $\displaystyle \lim_{x\to -3} \frac{x^2-x-12}{x+3}$

3 $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}\right)$

4 $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

5 $\displaystyle\lim_{x\to -1/2} \frac{4x^2-1}{6x^2+x-1}$

6 $\displaystyle\lim_{x\to 5} \left(\frac{2x^2-x+19}{7x-8}\right)^{1/3}$

7 $\displaystyle\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

8 $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2-t}-\sqrt{2}}{t}$

9 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$

10 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$

11 Sannið setningu 3.1.6.

12 Látum f vera fall á $\mathbb{R}$. Gerum ráð fyrir að til sé rauntala M þannig að $|f(x)| < M$ fyrir öll x. Sýnið að

$$\lim_{x\to 0} xf(x) = 0.$$

13 Látum $r(x) = p(x)/q(x)$ þar sem p og q eru margliður þannig að

$$p(a) \neq 0 \quad \text{og} \quad q(a) = 0.$$

Sýnið að $\lim_{x\to a} r(x)$ er ekki til. [Ábending: Athugið $\lim_{x\to a} q(x)r(x)$.]

14 Sannið setningu 3.1.7. í kennslubókinni.

Gerið grein fyrir hvort markgildin í dæmum 14-26 séu til og finnið þau ef svo er. Hér táknar $[x]$ svokallað *heiltölugildi* tölunnar x, en það er stærsta heila talan n sem fullnægir ójöfnunni $n \leq x$.

15 $\displaystyle\lim_{x\to 4^+} \frac{x-4}{|x-4|}$

16 $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \sqrt{9-x^2}$

17 $\displaystyle\lim_{t\to 3} \frac{|t-3|}{t-3}$

18 $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}$

19 $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2+2x-1}$

20 $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} \frac{\sqrt{(5-x)^2}}{5-x}$

21 $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} [x]$

22 $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} [x]$

23 $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \sqrt{x^2-x-2}$

24 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x-12}$

25 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x}{x^2-3}$

26 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{5x^2-2}}{x-3}$

27 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x^{1/2}-x^{1/3})$

3.2 Samfelld föll

Helstu eiginleikar samfelldra falla eru settir fram í næstu setningu. Liður (ii), hin svo kallaða *Milligildissetning*, segir að samfellt fall skilgreint á bili sleppi ekki úr gildi og varpi þannig bili á bil og af liðum (i) og (ii) saman má álykta að samfellt fall varpi lokuðu og takmörkuðu bili á lokað og takmarkað bil. Þetta getur líka átt við um sum ósamfelld föll. Liðir (iii) og (iv) koma við sögu í kaflanum um heildun.

Setning 3.2.1. (i) *Samfellt fall á lokuðu og takmörkuðu bili er takmarkað og tekur stærsta og minnsta gildi á bilinu.*
(ii) Milligildissetningin. *Lát f vera samfellt fall á bili I, lát $a < b$ vera punkta úr bilinu og y tölu milli $f(a)$ og $f(b)$. Þá er til t milli a og b þannig að $f(t) = y$.*
(iii) *Lát f vera samfellt fall á lokuðu og takmörkuðu bili, og lát $\epsilon > 0$ vera gefna (litla) tölu. Þá má skipta bilinu í endanlega mörg lokuð hlutbil þannig að munurinn á stærsta og minnsta gildi f á hverju hlutbili er minni en ϵ.*
(iv) *Eins og (iii), nema til viðbótar kemur að velja megi hlutbilin öll af sömu lengd.*

Sönnun. Sannanirnar á þessum fullyrðingum byrja allar eins, byrjað er með samfellt fall á lokuðu og takmörkuðu bili $[a, b]$. Bilinu er síðan skipt til helminga um miðpunktinn. Annað lokaða helmingsbilið, kallað $[a_1, b_1]$, er valið samkvæmt tiltekinni reglu og það síðan helmingað og annað helmingsbilið, $[a_2, b_2]$ valið samkvæmt sömu reglu. Svona er haldið áfram og þá kemur fram minnkandi runa,

$$[a_0, b_0] = [a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

af lokuðum og takmörkuðum bilum þar sem lengd hvers bils er helmingurinn af lengd bilsins á undan

Eins og kom fram í dæmi 2.2.15 þá eru runurnar (a_n) og (b_n) samleitnar með sama markgildi,

$\lim a_n = \lim b_n = c$. Einnig gildir að ef x_n er úr $[a_n, b_n]$ fyrir sérhvert n þá er $\lim x_n = c$ samkvæmt Klemmureglunni.

(i) Lát f vera samfellt fall á lokuðu og takmörkuðu bili $[a, b]$ og lát $A = \sup_{[a,b]} f$. Veljum síðan helmingsbilin þannig að $\sup_{[a_{n+1},b_{n+1}]} f = \sup_{[a_n,b_n]} f$ fyrir sérhvert n. Þá er $\sup_{[a_n,b_n]} f = A$ fyrir öll n.

Ef $A = +\infty$ þá má finna x_n úr $[a_n, b_n]$ þannig að $|f(x_n)| > n$ sem er ómögulegt því að runan (x_n), og þar með runan $(f(x_n))$, er samleitin. Fallið f er því takmarkað. Veljum x_n úr $[a_n, b_n]$ þannig að $f(x_n) > A - 1/n$. Runan (x_n) er samleitin, $\lim x_n = c$, og þar með er $\lim f(x_n) = f(c)$. En $A - 1/n < f(x_n) \leq A$ svo að $f(c) = A$.

Á tilsvarandi hátt fæst að f tekur minnsta gildi á bilinu.

(ii) Skoðum fyrst sértilfellið $y = 0$. Við gerum ráð fyrir að $f(a) > 0$ en $f(b) < 0$ (annars skoðum við $-f$). Ef f tekur gildið 0 á bilinu er ekkert að sanna. Annars veljum við helmingsbilin þannig að $f(a_n) > 0$ en $f(b_n) < 0$. Þar sem rununar (a_n) og (b_n) hafa sama markgildið c er $\lim f(a_n) = f(c)$ og $\lim f(b_n) = f(c)$. Nú er $f(a_n) > 0$ fyrir öll n svo að $f(c) \geq 0$. Einnig fæst úr $f(b_n) < 0$ að $f(c) \leq 0$. Þar með er $f(c) = 0$.

Í almenna tilfellinu notum við sértilfellið með fallinu $g = f - y$.

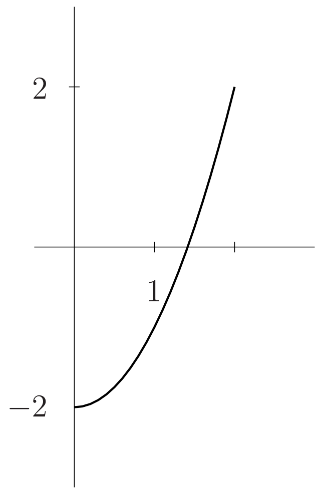
(iii) Ef þetta er ekki hægt þá veljum við hvert helmingsbil $[a_n, b_n]$ þannig að ekki er hægt að skipta því í endanlega mörg lokuð hlutbil þar sem á hverju hlutbili er munurinn á stærsta og minnsta gildi f minni en ϵ. Þá má finna punkta x_n og y_n úr $[a_n, b_n]$ þannig að $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ (ella mætti nota bilið sjálft sem skiptingu). Nú fæst eins og áður að $\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(c)$ svo að $\lim f(x_n) = \lim f(y_n) = f(c)$ samkvæmt Klemmreglunni. Þar með er $\lim(f(x_n) - f(y_n)) = 0$ sem er ómögulegt því að $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ fyrir sérhvert n.

(iv) Við notum (iii) með $\epsilon/2$ í stað ϵ og fáum skiptingu. Veljum jafna skiptingu þar sem billengdin er minni en lengd stysta bilsins í upphaflegu skiptingunni. Þá er sérhvert bil I í jöfnu skiptingunni innihaldið í sammengi tveggja samliggjandi bila í upphaflegu skiptingunni með sameiginlegan punkt, segjum x. Þar með gildir um x_1 og x_2 í I að $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x)| + |f(x) - f(x_2)| \leq \epsilon$. □

Dæmi 3.2.2. Lítum á fallið $f(x) = x^2 - 2$ á bilinu $[0, 2]$. Það er margliða og því samfellt. Ennfremur gildir að $f(0) = -2$ og $f(2) = 2$. Setning 3.2.1 segir okkur þá að f hafi núllstöð á bilinu $(0, 2)$. Þetta jafngildir því að jafnan $x^2 = 2$ hafi rót á bilinu $(0, 2)$.

Ljóst er að fallið f varpar ræðum tölum í ræðar tölur. Ef við hins vegar einskorðum fallið við ræðar tölur, þá fæst engin núllstöð, því sýnt hefur verið að jafnan $x^2 = 2$ hefur enga ræða lausn.

Í vissum skilningi má segja að rauntalnakerfið sé byggt upp í því augnamiði að Milligildissetningin sé rétt, sem er í góðu samræmi við rúmfræðilegt innsæi okkar: Óslitinn ferill í sléttunni, sem byrjar öðrum megin við rauntalnalínuna og endar hinu megin við hana, hlýtur að skera hana að minnsta kosti einu sinni.



Mynd 3.1: Fallið $y = x^2 - 2$

Dæmi 3.2.3. Fallið $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8$ er margliða og þar með samfellt. Með einföldum reikningum fæst

$$f(-4) > 0,\ f(0) < 0,\ f(1/2) > 0,\ f(1) < 0 \text{ og } f(4) > 0.$$

Af þessu leiðir samkvæmt setningu 3.2.1 að margliðan f hefur eina núllstöð á hverju bilanna

$$(-4, 0),\ (0, 1/2),\ (1/2, 1) \text{ og } (1, 4).$$

Athugasemd. Á sama hátt og í skilgreiningu 3.1.4 er hægt að skilgreina hvað átt er við með því að fall f stefni á plús óendanlegt eða mínus óendanlegt þegar x stefnir á punktinn a frá hægri eða frá vinstri. Táknmálið sem við notum er einnig í fullu samræmi við það sem á undan er komið. Til dæmis merkir $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, að fallið f stefni á plús óendanlegt þegar x stefnir á a frá vinstri. Lesandinn er eindregið hvattur til þess að setja fram þessar skilgreiningar og efla þannig skilning sinn á viðfangsefninu.

Skilgreining 3.2.4. Látum fall f vera skilgreint á opnu bili, sem inniheldur punkt a, nema hugsanlega í punktinum a.

(i) Við segjum að f *stefni á plús óendanlegt* þegar x stefnir á a ef $\lim x_n = a$ hefur í för með sér að $\lim f(x_n) = +\infty$. Á táknmáli er þetta ritað $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ eða $f(x) \to +\infty$ þegar $x \to a$.

(ii) Við segjum að fallið f *stefni á mínus óendanlegt* ef $\lim x_n = a$ hefur í för með sér að $\lim f(x_n) = -\infty$ Á táknmáli er þetta ritað $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ eða $f(x) \to -\infty$ þegar $x \to a$.

Skilgreining 3.2.5. Látum f vera fall sem er skilgreint á hálflínunni $[c, +\infty)$. Við segjum að $f(x)$ stefni á tölu L þegar x stefnir á plús óendanlegt ef $\lim x_n = +\infty$ hefur í för með sé að $\lim f(x_n) = L$. Á táknmáli er þetta ritað

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

Athugasemd. Lesandinn ætti nú að vera þess albúinn að gefa eftirfarandi nákvæma merkingu,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

Líkt og með skilgreininguna á markgildi má setja skilgreiningu 3.2.5 fram á annan hátt:

Fyrir sérhverja náttúrulega tölu k má finna tölu $M > 0$ þannig að

$$|f(x) - L| < 10^{-k} \text{ ef } x \geq M.$$

Til að sýna fram á að gamla skilgreiningin innihaldi þá nýju notum við óbeina sönnun. Ef rangt þá er til k_0 sem ekkert M passar fyrir . Þannig er fyrir sérhverja náttúrulega tölu n til $x_n > n$ þannig að

$$|f(x_n) - L| \geq 10^{-k_0}.$$

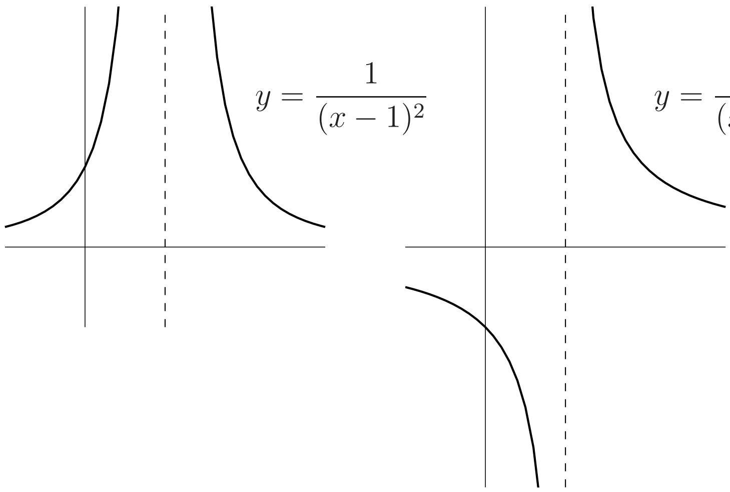
En þá er $\lim x_n = +\infty$ en $\lim f(x_n) \neq L$.

Dæmi 3.2.6. (i) Sýnum að $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$. Lát $\lim x_n = 1$. Sýnum að $\lim f(x_n) = +\infty$. Gefið $M > 0$. Viljum finna náttúrulega tölu N þannig að

$$\frac{1}{(x_n-1)^2} > M \quad \text{ef} \quad n \geq N.$$

En $\frac{1}{(x-1)^2} > M$ jafngildir $|x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}}$ svo við veljum k þannig að $10^{-k} < \frac{1}{\sqrt{M}}$ og síðan N þannig að $|x_n - 1| < 10^{-k}$ ef $n \geq N$.

(ii) Sýnum að $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$. Lát $\lim x_n = 1^-$. Sýnum að $\lim f(x_n) = -\infty$. Gefið $M > 0$. Veljum náttúrulega tölu k þannig að $10^{-k} < \frac{1}{M}$ og förum síðan eins að og í fyrra dæminu.



Mynd 3.2:

Ósamfellupunktur falls sem skilgreint er á bili getur verið punktur þar sem markgildi fallsins frá vinstri eða hægri eru ekki til, eru til en eru ólík, eru til og eru eins en ekki jöfn gildinu í punktinum. (Gefið dæmi um slík tilfelli.) Um ósamfellupunkt einhalla falls er hægt að segja meira eins og næsta setning sýnir.

Skilgreining 3.2.7. Látum $S \subseteq \mathbb{R}$ og $f : S \to \mathbb{R}$. Við segjum að

(i) fallið f sé *vaxandi* á S ef $f(x) \leq f(y)$ fyrir öll x og y úr S þannig að $x < y$.

(ii) fallið f sé *stranglega vaxandi* á S ef $f(x) < f(y)$ fyrir öll x og y úr S þannig að $x < y$.
(iii) fallið f sé *minnkandi* á S ef $f(x) \geq f(y)$ fyrir öll x og y úr S þannig að $x < y$.
(iv) fallið f sé *stranglega minnkandi* á S ef $f(x) > f(y)$ fyrir öll x og y úr S þannig að $x < y$.
(v) fallið f sé *einhalla* á S ef það er vaxandi á S eða minnkandi á S.
(vi) fallið f sé *stranglega einhalla* á S ef það er stranglega vaxandi á S eða stranglega minnkandi á S.

Setning 3.2.8. *Lát f vera vaxandi (minnkandi) fall á bili I og x_0 vera punkt úr bilinu. Þá eru markgildi f frá vinstri og hægri í punktinum x_0 til og*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Sönnun. Við skoðum tilfellið þar sem f er vaxandi. Ef $x \leq x_0$ þá er $f(x) \leq f(x_0)$ svo að $f(x_0)$ er yfirtala fyrir mengið

$$Ix_0^- = \{f(x) : x \in I \text{ og } x < x_0\}.$$

Sýnum að

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup I_{x_0}.$$

Látum því k vera náttúrulega tölu. Við þurfum að finna númer N þannig að

$$\sup I_{x_0^-} - 10^{-k} < f(x_n) \leq f(x_0)$$

fyrir $n \geq N$. Veljum $x' < x_0$ þannig að

$$f(x') > \sup I_{x_0^-} - 10^{-k}.$$

Þar sem runan (x_n) stefnir á x_0 frá vinstri er til númar N þannig að

$$x' < x_n < x_0$$

ef $n \geq N$, og þar með er

$$\sup I_{x_0^-} - 10^{-k} < f(x') \leq f(x_n) \leq \sup I_{x_0^-}$$

ef $n \geq N$. Fullyrðingin um markgildi frá hægri fæst á tilsvarandi hátt. $\square$

Setningin hér að framan segir að x_0, ósamfellupunktur vaxandi falls, sé punktur þar sem markgildi fallsins frá vinstri er minna en markgildið frá hægri. Þar sem fallið er vaxandi tekur það engin gildi milli vinstri og hægri markgildanna, nema gildið í x_0. Tilsvarandi niðurstaða fæst fyrir minnkandi föll.

Á svipaða hátt fæst hin ójafnan.

Dæmi 3.2.9. Látum n vera jákvæða heila tölu og lítum á fallið $f(x) = x^n$ á hálflínunni $[0, +\infty)$. Ef $x, y \in [0, +\infty)$ og $x < y$, þá gildir samkvæmt dæmi 1.3.7 í dæmasafni að

$$f(y) - f(x) = y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}) > 0$$

svo að $f(x) < f(y)$. Af þessu sést að fallið f er eintækt. Sýnum að fallið f sé einnig átækt. Ljóst er að $f(0) = 0$. Ef $a > 0$ veljum við $c > 1$ þannig að $c > a$; til dæmis $c = a + 1$. Þá fæst

$$f(0) = 0 < a < c < c^n = f(c).$$

Samkvæmt Milligildissetningunni 3.2.1 tekur því fallið f gildið a á bilinu $(0, c)$. Af ofanskráðu leiðir að fyrir sérhverja tölu a úr $[0, +\infty)$ er til nákvæmlega ein tala b úr $[0, +\infty)$ þannig að $b^n = a$. Við skrifum $b = a^{1/n}$ og köllum n-tu rót tölunnar a.

Með hliðsjón af þessu ætti lesandi að geta fengið eftirfarandi niðurstöður:

Ef n er oddatala og $a \in \mathbb{R}$, þá hefur jafnan $x^n = a$ nákvæmlega eina lausn og er hún táknuð með $a^{1/n}$.

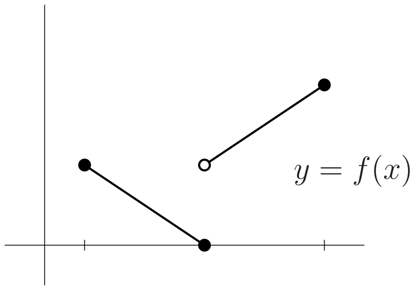
Ef n er slétt tala og $a \in \mathbb{R}$, þá hefur jafnan $x^n = a$ nákvæmlega tvær lausnir, $a^{1/n}$ og $-a^{1/n}$ ef $a > 0$, nákvæmlega eina lausn ef $a = 0$ og enga lausn ef $a < 0$.

Athugasemd. Ljóst er að stranglega einhalla föll eru eintæk. Næsta setning segir ef samfelldni er bætt við fæst leiðingin í hina áttina.

Setning 3.2.10. *Ef fall $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er eintækt og samfellt, þá er fallið f stranglega einhalla.*

Sönnun. Sjá dæmi 15 í verkefnakafla 3.2. □

Athugasemd. Samfelldni er nauðsynleg forsenda í síðustu setningu (sjá mynd 3.3).



Mynd 3.3:

Setning 3.2.11. *Eintækt og samfellt fall f skilgreint á bili I á sér samfellda andhverfu f^{-1}.*

Sönnun. Samkvæmt milligildissetningunni þá varpar f bilinu I á bil J og andhverfa fallið er þar með skilgreint á bili J. Samkvæmt setningu 3.2.10 þá er f stranglega einhalla og þar með er f^{-1} líka stranglega einhalla. Þar sem f^{-1} varpar bilinu J á bilið I þá sleppir f^{-1} engum gildum úr og er því samfellt samkvæmt setningu 3.2.8.

Dæmi 3.2.12. Af setningu 3.2.11 fást eftirfarandi niðurstöður.
(i) Ef n er jákvæð oddatala, þá er fallið

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \to x^{1/n},$$

samfellt og stranglega vaxandi.
(ii) Ef n er jákvæð slétt tala, þá er

$$[0, +\infty) \to \mathbb{R}; x \to x^{1/n},$$

samfellt og stranglega vaxandi.

Látum $r > 0$ vera ræða tölu og skrifum $r = n/m$. Fyrir $x \geq 0$ setjum við $x^r = (x^{1/m})^n$. Fallið

$$[0, +\infty) \to \mathbb{R}; \quad x \to x^r$$

er samskeyting samfelldra falla og því samfellt. Fyrir $x > 0$ setjum við $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$ og fáum samfellt fall

$$(0, +\infty) \to \mathbb{R}; \quad x \to x^{-r}.$$

Verkefni 3.2

Gerið grein fyrir hvar föllin í dæmum 1-4 eru samfelld.

1 $f(x) = \dfrac{x^4 + 17}{6x^2 + x - 1}$

2 $f(x) = \sqrt{\dfrac{9 - x^2}{1 - x^2}}$

3 $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$

4 $f(x) = \dfrac{|x - 6|}{x - 6}$

5 Skilgreinum fall f með

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 - 2x^3}{x - 2}, & \text{ef } x \neq 2 \\ 8, & \text{ef } x = 2. \end{cases}$$

Er fallið f samfellt?

Í dæmum 6-8 skal finna þá punkta þar sem fallið er ekki skilgreint. Fyrir sérhvern punkt a, þar sem fallið er ekki skilgreint, skal síðan segja til um hvort gefa megi $f(a)$ gildi þannig að fallið verði samfellt í punktinum a.

6 $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 2x - 8}$

7 $f(x) = \dfrac{x - 5}{|x - 5|}$

8 $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ef } x < 1 \\ 2, & \text{ef } x > 1 \end{cases}$

Sýnið að jöfnurnar í dæmum 9-11 hafi lausnir á bilunum sem tilgreind eru

9 $x^4 + 2x - 1 = 0$ á $(0, 1)$

10 $x^3 + 2x = x^2 + 1$ á $(0, 1)$

11 $x^2 = \sqrt{x^2 + 1}$ á $(0, 2)$

12 Sannið að jafnan $x^3 - 5x^2 + 2x + 6 = 0$ hafi þrjár mismunandi rauntölulausnir.

13 Sýnið að fallið

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ef } x \text{ er ræð} \\ 1, & \text{ef } x \text{ er óræð} \end{cases}$$

sé ósamfellt fyrir öll $x \in \mathbb{R}$.

14 Sýnið að sérhver margliða af oddatölustigi hafi minnst eina rauntölurót.

15 Sýnið að samfellt og eintækt fall á lokuðu bili sé stranglega einhalla. Gildir þetta einnig um samfelld og eintæk föll á opnum bilum, hálfopnum bilum, opnum hálflínum og lokuðum hálflínum?

16 Látum $g(x) = x\sin(\frac{1}{x})$, ef $x \neq 0$ og $f(x) = [x+1]+[-x]$. Gerið lauslega skýringarmynd af fallritum fallanna f og g og sýnið að $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ og $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Er $\lim_{x\to 0} f(g(x))$ til?

17 Fyrir hvaða gildi er fallið

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ef } x \text{ er ræð} \\ x, & \text{ef } x \text{ er óræð} \end{cases}$$

samfellt?

18 Látum f vera samfellt fall á bilinu $[0,1]$ með gildi á milli 0 og 1. Sannið að til sé tala c úr bilinu $[0,1]$ þannig að $f(c) = c^2$.

19 Fjallgöngumaður leggur af stað upp á fjall nokkurt kl. 10:00 á laugardagsmorgni og er kominn upp kl. 16:00 sama dag. Hann ákveður að gista á fjallstoppnum um nóttina. Morguninn eftir hefur hann niðurgönguna kl. 10:00 og er kominn niður kl.16:00. Sýnið á einhverjum tíma á sunnudeginum hafi fjallgöngumaðurinn verið í nákvæmlega sömu hæð og hann var í á sama tíma daginn áður.

20 Fallið f er skilgreint með

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ef } x \text{ er óræð} \\ 1, & \text{ef } x = 0 \\ 1/q, & \text{ef } x = p/q, \text{ þar sem } p/q \text{ er fullstytt} \\ & \quad \text{brot með } p \neq 0 \text{ og } q > 0. \end{cases}$$

(a) Sýnið að f sé ósamfellt í a ef a er ræð tala.

(b) Sýnið að f sé samfellt í a ef a er óræð tala.

3.3 Hornaföll

Í þessari bók gerum við ráð fyrir að lesendur þekki rúmfræðilega skilgreiningu á hornaföllum og kunni skil á helstu eiginleikum þeirra. Þegar fjallað var um tvinntölur í 1. kafla, þá voru föllin kósínus og sínus notuð athugasemdalaust. Þar var, eins og þið hafið vanist, litið á kósínus og sínus sem föll af rauntölum.

En það byggðist á þeirri (ósönnuðu) forsendu að unnt sé að „mæla horn“. Þetta er hins vegar ekki nærri eins einfalt mál og margir kynnu að ætla. Við skulum því skoða þetta atriði nokkru nánar.

Flest ykkar hafa lært að „mæla horn“ með eftirfarandi hætti: Stærð horns AOB er „lengd bogans“ sem hornið spannar af hring með miðju í O og geisla 1. En gallinn við þessa aðferð er sá að engan veginn er ljóst hvað átt er við með „lengd bogans“. Hér verður ekki fjallað um það hvernig unnt er að gefa hugtakinu „lengd ferils“, og þar með „lengd hringboga“ skynsamlega merkingu. Það er ekki auðvelt verkefni og heyrir til þess sviðs raunfallagreiningarinnar sem fjallar um raungild föll af fleiri en einni breytistærð. Við göngum því út frá eftirfarandi niðurstöðu sem gefinni, en hún er útskýrð nánar í grein 9.8 aftast í þessari bók.

Látum S vera einingarhringinn í $\mathbb{R}^2$, þ.e. hringinn með miðju í (0,0) og geisla 1. Til er vörpun $\phi : \mathbb{R} \to S$ sem hefur eftirfarandi eiginleika:

(i) $\phi(0) = (1, 0)$

(ii) Ef $x > 0$ þá er $\phi(x)$ punkturinn á S sem fæst með því að vefja strikinu $[0, x]$ upp á S rangsælis þannig að lengdin varðveitist.

(iii) Ef $x < 0$ þá er $\phi(x)$ punkturinn á S sem fæst með því að vefja strikinu $[0, |x|]$ upp á S réttsælis þannig að lengdin varðveitist.

Athugasemd. Þegar við segjum að „lengdin varðveitist“, þá er átt við að ferillinn $[0, |x|] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \phi(t)$ sé jafnlangur strikinu $[0, |x|]$.

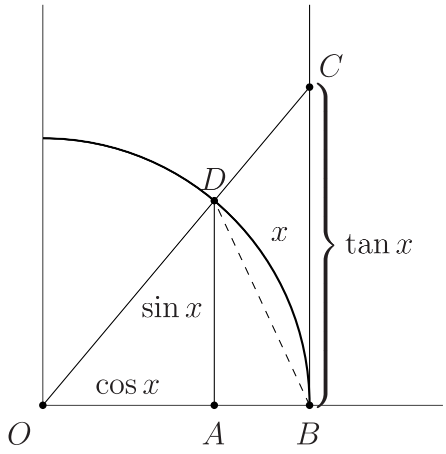
Út frá ofangreindri niðurstöðu er nú hægt að skilgreina föllin sincosá $\mathbb{R}$: Látum x vera úr $\mathbb{R}$ og setjum $O = (0, 0), A = (1, 0)$ og $B = \phi(x)$. Þá er $\sin x$ jafnt sínusnum af horninu AOB og $\cos x$ jafnt kósínusnum af horninu AOB. Með öðrum orðum, ef við skrifum $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x))$, þá er $\cos x = \phi_1(x)$ og $\sin x = \phi_2(x)$. Tökum eftir að bilið $[-1, 1]$ er bæði myndmengi fallsins sin og fallsins cos.

Samkvæmt venju látum við πtákna hálft ummál einingarhringsins.

Setning 3.3.1. *Fyrir* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *gildir*

$$\cos x \cdot \sin x < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}. \tag{1}$$

Sönnun. Til þess að sýna fram á að þessar ójöfnur gildi þurfum við á einfaldri flatarmálsfræði að halda. Setjum $O = (0, 0)$, $A = (\cos x, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, \tan x)$ og $D = (\cos x, \sin x)$.



Mynd 3.4:

Nú fæst : Flatarmál þríhyrningsins OAD er $\frac{1}{2}\cos x \cdot \sin x$, flatarmál þríhyrningsins OBD er $\frac{1}{2}\sin x$, flatarmál hringgeirans OBD er $\frac{1}{2}x$, flatarmál þríhyrningsins OBC er $\frac{1}{2}\tan x$. Af þessu sést að (1) gildir. $\square$

Athugasemd. Setningin hefur augljóslega í för með sér að $\sin x < x$ fyrir öll $x > 0$ og þar sem $\sin(-x) = -\sin x$, þá fæst $|\sin x| < |x|$ fyrir öll x úr $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Setning 3.3.2. *Föllin* sin *og* cos *eru samfelld á öllu* $\mathbb{R}$.

Sönnun. Þar eð $|\sin x| \leq |x|$ fyrir öll x, þá fæst með því að nota klemmureglu

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 = \sin 0$$

En það þýðir að fallið sin er samfellt í punktinum 0. Samkvæmt samlagningarreglu fyrir cos gildir

$$\cos x = 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2}) \tag{2}$$

svo að $\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0} 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2}) = 1 = \cos 0$, og þar með er cos einnig samfellt í punktinum 0.

Látum nú x vera úr $\mathbb{R}$. Þá gildir

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\sin(x+h) &= \lim_{h\to 0}(\sin x\cos h + \cos x \sin h)\\ &= \sin x \lim_{h\to 0}\cos h + \cos x \cdot \lim_{h\to 0}\sin h = \sin x.\end{aligned}$$

Þar með höfum við sýnt að sin er samfellt á öllu $\mathbb{R}$ og með hliðsjón af (2) fæst einnig að cos er samfellt á öllu $\mathbb{R}$. $\square$

Setning 3.3.3.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Sönnun. Samkvæmt setningu 3.3.1 gildir fyrir $0 < x < \frac{\pi}{2}$
$$\cos x \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$$
Með því að deila með $\sin x$ fæst fyrir $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$
$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$
Tökum umhverfur og fáum
$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$
Samkvæmt klemmureglu fæst þá
$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \geq \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$
Þar með er
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
$\square$

Dæmi 3.3.4. Finnið
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\tan x}$$

Úrlausn.
$$0 \leq \left| \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\tan x} \right| \leq \left| \frac{x^2}{\tan x} \right|$$
vegna $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$. En
$$\frac{x^2}{\tan x} = x \cdot \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \to 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \qquad \text{þegar } x \to 0.$$
Klemmuregla gefur þá
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\tan x} = 0.$$

Verkefni 3.3

Finnið markgildin í dæmum 1-10 eða gerið grein fyrir að þau séu ekki til.

1 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$

2 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(2x)}{x^2}$

3 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(x\sin\frac{1}{x})$

4 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

5 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

6 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

7 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x}$

8 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}$

9 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\tan bx},\ (a\neq 0, b\neq 0)$

10 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

Kafli 4

Diffrun

Um miðbik sautjándu aldar urðu mikil straumhvörf í stærðfræði þegar Isaac Newton (1642-1727) og Gottfried Leibniz (1646-1716) fundu upp *örsmæðareikninginn* (e. calculus), en það er sú grein stærðfræðinnar sem fjallar um diffrun og heildun. Hún átti síðar eftir að þróast yfir í það sem núorðið kallast *stærðfræðigreining* (e. mathematical analysis).

Þau nýju hugtök og aðferðir sem Newton og Leibniz settu fram gerðu mönnum kleift að fást við verkefni sem eldri tíma stærðfræði réði illa við eins og t.d. skilgreiningu á hutakinu *hraði*. Með örsmæðareikningnum var til dæmis unnt að lýsa hreyfingu og hraða, finna snertilínu ferils í tilteknum punkti og ákvarða flatarmál sem afmarkast af tilteknum ferli. Newton og Leibniz uppgötvuðu einnig að diffrun og heildun eru í vissum skilningi andhverfar aðgerðir, en sú niðurstaða er sett fram í svokallaðri *undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar* (setning 5.3.2) sem oftast er kennd við Newton.

Í þessum kafla verður eingöngu fjallað um diffrun, en kafli fimm verður svo helgaður heilduninni.

4.1 Diffranleg föll

Við skulum byrja á því að skoða hugtakið hraði. Hugsum okkur hlut sem hreyfist eftir beinni línu og að $f(t)$ tákni fjarlægð hlutarins frá upphafspunkti við tímann t. *Meðalhraðinn* yfir tímabilið frá t til $t+h$ er talan

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

þ.e.a.s. breyting í vegalengd yfir tímabilið deilt með lengd tímabilsins. Hér er h einhver (lítil) tala. Hugmyndin er sú að láta h minnka og athuga hvað gerist með meðalhraðann. Ef markgildi fæst þá væri hægt að kalla það *hraða* hlutarins við tímann t.

Skilgreining 4.1.1. (i) Látum f vera fall á opnu bili I og látum $a \in I$. Við segjum að f sé *diffranlegt í punktinum* a ef fallið F skilgreint fyrir lítil gildi á $h \neq 0$ sem

$$F(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

hefur markgildi þegar h stefnir á 0. Ef svo er, þá setjum við

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} F(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Yfirleitt sleppum við því að innleiða táknið $F(h)$ og notum bara skilgreiningu þess. Töluna $f'(a)$ nefnum við *afleiðu fallsins* (eða diffurkvóta) f í punktinum a.

(ii) Látum f vera fall á opnu bili I. Við segjum að fallið f sé *diffranlegt á bilinu* I ef það er diffranlegt í sérhverjum punkti á bilinu. Fallið

$$f' : I \to \mathbb{R}; x \mapsto f'(x)$$

kallast *afleiða fallsins* f (á bilinu I). Táknin Df og $\frac{df}{dx}$ eru einnig notuð í stað f', og ennfremur $\frac{dy}{dx}$ eða y' ef notaður er rithátturinn $y = f(x)$.

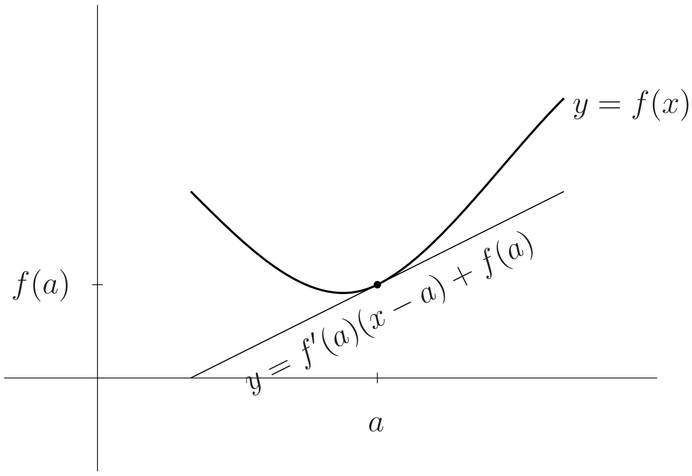
Skilgreining 4.1.2. Látum f vera fall á opnu bili, a vera punkt á bilinu og gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt í punktinum a. Línan gegnum punktinn $(a, f(a))$ sem hefur hallatöluna $f'(a)$ kallast *snertilína fallrits* $y = f(x)$ *í punktinum* $(a, f(a))$. Jafna hennar er

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Setning 4.1.3. *Látum f vera fall á opnu bili og a vera punkt úr bilinu. Ef fallið f er diffranlegt í punktinum a, þá er það einnig samfellt í punktinum a.*

Sönnun.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}(f(a+h) - f(a)) &= \lim_{h\to 0}(h \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h}) \\ &= (\lim_{h\to 0} h)(\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}) \\ &= 0 \cdot f'(a) = 0,\end{aligned}$$



Mynd 4.1: Snertilína ferils

Samkvæmt reglum um markgildi falla, □

Athugasemd. Fall getur verið samfellt í punkti án þess að vera diffranlegt í punktinum. Lítum til dæmis á fallið $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto |x|$. Þetta fall er samfellt á öllu $\mathbb{R}$, en það er ekki diffranlegt í núllpunktinum eins og sést á eftirfarandi útreikningum.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h-0}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h-0}{h} = -1.$$

Dæmi 4.1.4. Fyrir sérhvert x úr $\mathbb{R}$ gildir

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \sin h \cos x}{h} \\
&= \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}.
\end{aligned}$$

Við vitum að $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h} = 1$. Ennfremur fæst

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}\cdot\frac{\cos h + 1}{\cosh +1}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 h}{h}\cdot\frac{1}{\cos h + 1}\\
=&(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h})\cdot(\lim_{h\to 0}(-\sin h)\cdot(\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos h + 1})\\
=&1\cdot 0\cdot\frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Af þessu leiðir að

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x.$$

Við höfum þá sýnt að $\sin x$ er diffranlegt á $\mathbb{R}$ og afleiða þess í punkti x er $\cos x$.

Dæmi 4.1.5. Fyrir sérhvert x úr $\mathbb{R}$ gildir

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}(\cos x\cdot\frac{\cos h - 1}{h} - \sin x\cdot\frac{\sin h}{h})\\
=&0 - \sin x = -\sin x.
\end{aligned}$$

Við höfum þá sýnt að cos er diffranlegt fall á $\mathbb{R}$ og afleiða þess í punkti x er $-\sin x$.

Dæmi 4.1.6. Látum f vera fastafall. Þá er til c úr $\mathbb{R}$ þannig að $f(x) = c$ fyrir öll x úr $\mathbb{R}$ og þá er

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$

Af þessu leiðir að fastaföll eru diffranleg á $\mathbb{R}$ og hafa afleiðu núll í sérhverjum punkti.

Setning 4.1.7. *Látum f og g vera föll á opnu bili og a vera punkt úr bilinu. Ef föllin f og g eru diffranleg í punktinum a, þá gildir*

(i) *Fallið $f+g$ er diffranlegt í punktinum a og*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

(ii) *Fallið $f \cdot g$ er diffranlegt í punktinum a og*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

(iii) *Ef að auki gildir $g(a) \neq 0$, þá er fallið $\frac{f}{g}$ diffranlegt í punktinum a og*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}.$$

Sönnun. (i)

$$\begin{aligned}
&\frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} \\
&= \frac{f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a)}{h} \\
&= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&\to f'(a) + g'(a) \qquad \text{þegar } h \to 0.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
&\frac{(f \cdot g)(a+h) - (f \cdot g)(a)}{h} \\
&= \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h} \\
&= \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a+h) + f(a) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h} \\
&= g(a+h)\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + f(a)\frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&\to g(a)f'(a) + f(a)g'(a) \qquad \text{þegar } h \to 0.
\end{aligned}$$

(iii) Sýnum fyrst að $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$.

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} \\ &= \frac{g(a) - g(a+h)}{hg(a+h)g(a)} \\ &= -\frac{g(a+h) - g(a)}{h} \cdot \frac{1}{g(a)g(a+h)} \\ &\to -\frac{g'(a)}{g^2(a)} \qquad \text{þegar } h \to 0.\end{aligned}$$

Samkvæmt (ii) fæst því

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) \\ &= f'(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)(a) + f(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(a) \\ &= f'(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)(a) - \frac{(f)(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)} \\ &= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}.\end{aligned}$$

□

Dæmi 4.1.8. Lítum á fallið $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x$. Þar sem $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1$, þá er f diffranlegt á $\mathbb{R}$ og $f'(x) = 1$ fyrir öll x úr $\mathbb{R}$. Með því að beita (ii) í síðustu setningu og þrepun fæst $Dx^n = nx^{n-1}$ fyrir allar heilar tölur $n \geq 0$.

Ef n er neikvæð tala, þá er $-n \geq 1$ og með því að beita (iii) í síðustu setningu fæst

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x^{-n}}) = \frac{dx^{-n}/dx}{x^{-2n}} = \frac{-(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = n \cdot x^{-n-1} \cdot x^{2n} = nx^{n-1}$$

Þar með er sýnt að $Dx^n = nx^{n-1}$ fyrir allar heilar tölur $n \neq 0$. Af þessu og (i) og (ii) í síðustu setningu leiðir að sérhver margliða

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

er diffranleg á $\mathbb{R}$ og

$$\frac{d}{dx}P(x) = a_n\frac{d}{dx}x^n + \cdots + a_1\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}a_0 = na_nx^{n-1} + \cdots + a_1$$

fyrir öll x úr $\mathbb{R}$.

Minnumst þess að *rætt fall* á $\mathbb{R}$ er fall af gerðinni $\frac{P(x)}{Q(x)}$, þar sem P og Q eru margliður. Samkvæmt (iii) í síðustu setningu er slíkt fall diffranlegt í sérhverjum punkti þar sem það er skilgreint, það er að segja í þeim punktum þar sem Q tekur ekki gildið núll.

Næsta niðurstaða er kölluð *keðjureglan*.

Setning 4.1.9 (Keðjuregla)**.** *Látum f vera fall á opnu bili I, a vera punkt úr I og g vera fall á opnu bili, sem inniheldur $f(I)$. Ef fallið f er diffranlegt í punktinum a og fallið g er er diffranlegt í punktinum $f(a)$, þá er samskeytta fallið $g \circ f$ diffranlegt í punktinum a og*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Sönnun. Setjum $k(h) := f(a+h) - f(a)$. Fallið k er skilgreint á opnu bili sem inniheldur punktinn 0. Ennfremur fæst að

$$\lim_{h\to 0}\frac{k(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \tag{1}$$

og

$$\begin{aligned}
&\frac{(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a)}{h} \\
&= \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} \\
&= \frac{g(f(a)+k(h)) - g(f(a))}{h} \\
&= \begin{cases} \frac{g(f(a)+k(h))-g(f(a))}{k(h)} \cdot \frac{k(h)}{h} & \text{ef } k(h) \neq 0 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Setjum

$$\phi(y) := \begin{cases} \frac{g(f(a)+y)-g(f(a))}{y} & \text{ef } y \neq 0 \\ g'(f(a)) & \text{ef } y = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Fallið ϕ er skilgreint á opnu bili, sem inniheldur punktinn 0 og ϕ er samfellt í punktinum 0 vegna þess að g er diffranlegt í punktinum $f(a)$, það er að segja

$$\lim_{y\to 0}\phi(y) = g'(f(a)).$$

Ljóst er út frá skilgreiningunni á $k(h)$, að $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$. Við höfum

$$\frac{g(f(a)+k(h)) - g(f(a))}{h} = \phi(k(h))\cdot\frac{k(h)}{h}.$$

Þar sem $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$ fæst út frá (1), og (2) að

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\phi(k(h))\cdot\lim_{h\to 0}\frac{k(h)}{h}\\ &= g'(f(a))f'(a).\end{aligned}$$

□

Athugasemd. Ef við notum rithátttinn $z = g(y)$, $y = f(x)$, skrifum x í stað a og skrifum í framhaldi af því $\frac{dz}{dx}$ í stað $(g\circ f)'(x)$, $\frac{dz}{dy}$ í stað $g'(y)$ og $\frac{dy}{dx}$ í stað $f'(x)$ þá lítur keðjureglan svona út:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Dæmi 4.1.10. Setjum $f(x) = \cos(\sin(x^2))$. Þá fæst samkvæmt keðjureglu með $z = \sin(x^2)$ og $y = x^2$ að

$$\begin{aligned}f'(x) = (\frac{d}{dz}\cos z)(\frac{d}{dy}\sin y)(\frac{d}{dx}x^2) &= -\sin z\cdot\cos y\cdot 2x\\ &= -\sin(\sin x^2)\cdot\cos(x^2)\cdot 2x.\end{aligned}$$

Setning 4.1.11 (Diffrun andhverfra falla)**.** *Látum f vera stranglega einhalla og samfellt fall á opnu bili I. Ef f er diffranlegt í punkti x úr I og $f'(x)\neq 0$, þá er f^{-1} diffranlegt í punktinum $f(x)$ og*

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Sönnun. Á opnu bili sem inniheldur punktinn 0 skilgreinum við fall k með $k(h) = f^{-1}(f(x)+h) - x$. Þar sem f^{-1} er samfellt í punktinum $f(x)$, þá er $\lim_{h\to 0} k(h) = f^{-1}(f(x)) - x = 0$. Með því að nota að $x+k(h) = f^{-1}(f(x)+h)$ og þar með að $h = f(x+k(h)) - f(x)$ fæst því

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(f(x)+h) - f^{-1}(f(x))}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(f(x)+h) - x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{k(h)}{f(x+k(h)) - f(x)}\\ &= \lim_{k\to 0}\frac{1}{(f(x+k) - f(x))/k}\\ &= \frac{1}{f'(x)}.\end{aligned}$$

$\square$

Dæmi 4.1.12. Látum $n \neq 0$ vera heila tölu og $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+; x \mapsto x^n$. Þá er $f^{-1}(x) = x^{1/n}$. Samkvæmt síðustu setningu fæst fyrir sérhvert $x > 0$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^{1/n} = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} &= \frac{1}{n\cdot (x^{1/n})^{n-1}}\\ &= \frac{1}{n}(x^{1/n})^{1-n}\\ &= \frac{1}{n}x^{(1/n)-1}.\end{aligned}$$

Ef $r \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}, r = \frac{p}{q}$, þá fæst samkvæmt keðjureglu

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^r &= D(x^{1/q})^p\\ &= p\cdot (x^{1/q})^{p-1}\cdot Dx^{1/q}\\ &= p\cdot (x^{1/q})^{p-1}\cdot \frac{1}{q}x^{(1/q)-1}\\ &= \frac{p}{q}x^{(p/q)-1}\\ &= r\cdot x^{r-1}.\end{aligned}$$

Verkefni 4.1

Diffrið föllin í dæmun 1-8.

1 $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

2 $g(x) = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x+1}{3x}$

3 $h(x) = x^2 \sin x - x \cos x$

4 $f(x) = (x+5)(x^2+7)(x-3)$

5 $g(x) = \dfrac{\cos x}{x \sin x}$

6 $h(t) = \dfrac{\sin t}{1 + \cos t}$

7 $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{2x+3}\right)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

8 $f(x) = \dfrac{x}{\sin x + \cos x}$

9 Finnið tvær línur í gegnum punktinn $(2, 8)$ sem eru snertlar við ferilinn $y = x^3$.

10 Hve margir snertlar við ferilinn $y = x/(x+1)$ liggja í gegnum punktinn $(1, 2)$? Í hvaða punktum snerta þessir snertlar ferilinn?

11 Finnið x-hnit allra þeirra punkta á ferlinum $y = 1 - x^2$ þar sem snertilína ferilsins í punktinum liggur í gegnum punktinn $(2, 0)$.

12 Hvaða skilyrði þurfa a, b og c að uppfylla til þess að ferillinn $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hafi

(a) nákvæmlega tvær láréttar snertilínur?

(b) nákvæmlega eina lárétta snertilínu?

(c) enga lárétta snertilínu?

13 Hvar er fallið

$$g(x) = \begin{cases} 3x+1, & x < -1 \\ x - x^2, & -1 \le x \le 1 \\ -2x+2, & x > 1 \end{cases}$$

diffranlegt? Gefið formúlu fyrir $g'(x)$ þar sem g er diffranlegt og teiknið g og g'.

14 Hvar er fallið $h(x) = |x+1| + |x-2|$ diffranlegt? Skrifið formúlu fyrir h' þar sem h er diffranlegt og teiknið h og h'.

Finnið afleiður fallanna í dæmum 15-37.

15 $f(t) = (2t^2 - 6t + 1)^{-8}$

16 $f(x) = (1 + (1 + x^3))^4$

17 $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

18 $h(x) = x^3 \sin^2(5x)$

19 $f(\theta) = \sin(\sin(\theta))$

20 $g(x) = \cos^3(\sin 2x)$

21 $f(x) = (2x^3 - 1)^{2/3}$

22 $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}$

23 $f(t) = t \sin \frac{1}{t}$

24 $g(x) = \cos(\sin(x^2))$

25 $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+1}{x-1}}$

26 $g(x) = (1 - 3x^4)^5(4 - x)^{1/3}$

27 $h(x) = x^2 \cos(3x^2 - 2)$

28 $g(x) = x + \sqrt{x}$

29 $f(x) = \cos^2(\cos x) + \sin^2(\cos x)$

30 $g(x) = ((1 + (x + x^4)^3)^5 + x^7)^6$

31 $h(u) = \cos(1 + \sin u)$

32 $f(x) = \sqrt{\sin(\cos^2 x)}$

33 $\sqrt{1 + \tan(x + \dfrac{1}{x})}$

34 $h(x) = \cot \sqrt[3]{1 + x^2}$

35 $f(t) = (t + (t + t^{1/2})^{1/2})^{1/2}$

36 $g(t) = \sqrt[4]{(1 - 3t)^4 + t^4}$

37 $h(x) = \cos(\sqrt{x}) + \sqrt{\cos x}$

38 Hversu hratt minnkar geisli hrings þegar flatarmál hans er $75\pi\text{cm}^2$ og minnkar með hraðanum $2\pi\text{cm}^2/\text{s}$?

39 Látum

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ef } x \neq 0 \\ 0, & \text{ef } x = 0 \end{cases}$$

(a) Finnið $f'(x)$ fyrir $x \neq 0$.

(b) Sýnið að f er samfellt í $x = 0$.

(c) Notið skilgreininguna á afleiðu til þess að sýna fram á að f sé diffranlegt í $x = 0$ og ákvarðið $f'(0)$.

(d) Sýnið að f' er ekki samfellt í $x = 0$.

40 Teningslaga ísklumpur, sem er 20 cm á hvern kant, byrjar að bráðna kl. 8 fyrir hádegi. Hver kantur styttist síðan með jöfnum hraða og er orðinn 8 cm kl. 4 eftir hádegi. Hversu hratt var rúmmál ísklumpsins að breytast um hádegi?

41 Finnið línu í gegnum punktinn $(18, 0)$ sem er hornrétt á fleygbogann $y = x^2$ í einhverjum punkti Q. [Lína er sögð *hornrétt* á feril í ákveðnum punkti ef hún er hornrétt á snertil hans í punktinum.]

42 Gerum ráð fyrir að f' sé samfellt á öllu $\mathbb{R}$, að $f'(0) \geq 0$ og að $f = f^{-1}$. Sýnið að $f(x) = x$ fyrir öll x, eða sýnið að þetta er ekki rétt með því að finna annað fall með þessa eiginleika.

43 Látum $a_1, \dots, a_n$ vera ólíkar rauntölur og setjum

$$Q(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n).$$

Sýnið að

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{\frac{1}{Q'(a_1)}}{x - a_1} + \cdots + \frac{\frac{1}{Q'(a_n)}}{x - a_n}$$

4.2 Útgildi diffranlegra falla

Skilgreining 4.2.1. Látum S vera hlutmengi í $\mathbb{R}$ og $f : S \to \mathbb{R}$

(i) Við segjum að fallið f *taki* (eða hafi) *staðbundið hágildi í punkti* c úr S ef til er opið bil I sem inniheldur punktinn c þannig að

$$f(x) \leq f(c) \qquad \text{fyrir öll } x \text{ úr } I \cap S.$$

(ii) Við segjum að fallið f *taki* (eða hafi) *staðbundið lággildi í punkti* c úr S ef til er opið bil I sem inniheldur punktinn c þannig að

$$f(x) \geq f(c) \qquad \text{fyrir öll } x \text{ úr } I \cap S.$$

(iii) Við segjum að fallið f *taki* (eða hafi) *staðbundið útgildi í punkti* c úr S ef það tekur annað hvort staðbundið hágildi eða lággildi í punktinum c.

Athugasemd. Ef fallið f tekur stærsta gildi í S, það er að segja ef til er punktur c úr S þannig að

$$f(c) \geq f(x) \qquad \text{fyrir öll } x \text{ úr } S,$$

þá er stundum sagt að f hafi *víðfeðmt hágildi* í punktinum c. Á sama hátt er sagt að fallið f taki *víðfeðmt lággildi* í punkti c úr S ef

$$f(c) \leq f(x) \qquad \text{fyrir öll } x \text{ úr } S.$$

Setning 4.2.2. *Látum f vera fall á opnu bili. Ef f tekur útgildi í punkti c úr bilinu og f er diffranlegt í c, þá er $f'(c) = 0$.*

Sönnun. Gerum ráð fyrir að fallið f taki staðbundið hágildi í punktinum c. Þá er til $\delta > 0$ þannig að

$$f(c+h) \leq f(c) \qquad \text{ef } -\delta < h < \delta.$$

Af þessu leiðir að

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \qquad \text{ef } 0 < h < \delta.$$

og

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \qquad \text{ef } -\delta < h < 0.$$

Þar sem f er diffranlegt í c, þá gildir

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

og þar með $0 \leq f'(c) \leq 0$, það er, $f'(c) = 0$.
Sönnunin gengur eins fyrir sig ef f tekur staðbundið lággildi í punktinum c. □

Skilgreining 4.2.3. Punktur c þar sem $f'(c) = 0$ kallast *stöðupunktur fallsins f*.

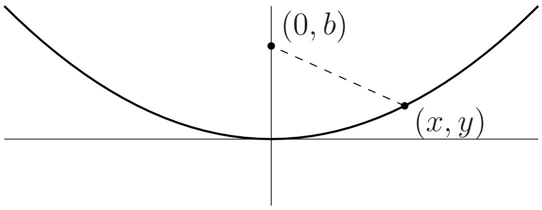
Aðvörun. Fall f þarf ekki nauðsynlega að taka útgildi í stöðupunktum sínum. Til dæmis hefur fallið

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^3$$

engin útgildi en $f'(0) = 0$.

Athugasemd. Látum $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vera samfellt og gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt á (a, b). Setning 3.2.1 segir okkur að f taki minnsta og stærsta gildi á bilinu $[a, b]$. Samkvæmt síðustu setningu fæst því að þessi gildi eru annað hvort tekin í stöðupunktum fallsins f eða í endapunktunum a og b.

Dæmi 4.2.4. Látum $b > 0$ og finnum fjarlægð punktsins $(0, b)$ frá fleygboganum $x^2 = 4y$ (sjá mynd (4.2)).



Mynd 4.2: Ferillinn $x^2 = 4y$

Úrlausn. Finna þarf lægsta gildi á $\sqrt{x^2 + (y-b)^2}$ að því gefnu að $x^2 = 4y$. Okkur nægir því að finna lægsta gildi fallsins $f(y) = 4y + (y-b)^2$ á hálflínunni $[0, +\infty)$ og taka síðan kvaðratrót þess gildis. Ljóst er að $\lim_{y\to+\infty} f(y) = +\infty$ svo við getum valið $M > 0$ þannig að $f(y) > f(0) = b^2$ fyrir öll $y \geq M$. Þar sem fallið f er samfellt þá tekur það lægsta gildi á bilinu $[0, M]$ og það gildi er jafnframt lægsta gildið sem f tekur á $[0, +\infty)$. Þetta gildi er annað hvort tekið í punktinum 0 eða í stöðupunkti fallsins f á $(0, +\infty)$. Finnum stöðupunkta fallsins f.

$$f'(y) = 4 + 2(y - b) = 0 \quad \text{þá og því aðeins að} \quad y = b - 2.$$

Ef $b \leq 2$ þá er $y = b - 2 \leq 0$ og því ekki á bilinu $[0, +\infty)$ svo fallið f hefur engan stöðupunkt á $(0, +\infty)$ og $f(0) = b^2$ er þá lægsta gildi fallsins f. Í þessu tilfelli er fjarlægð punktsins $(0, b)$ frá fleygboganum jöfn b. Ef $b \geq 2$ þá hefur fallið f stöðupunktinn $b - 2$ á $(0, +\infty)$. Nú er

$$f(0) - f(b-2) = b^2 - (4(b-2) + (b-2-b)^2) = b^2 - 4(b-1) = (b-2)^2 > 0$$

svo að $f(0) > f(b-2) = 4(b-1)$. Í þessu tilfelli er fjarlægð punktsins $(0, b)$ frá fleygboganum jöfn $2\sqrt{b-1}$.

Verkefni 4.2

Í dæmum 1-6 skal finna staðbundin og víðfeðm hágildi og lággildi viðkomandi falls á tilteknu bili.

1 $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ á bilinu $[1, 4]$.

2 $g(x) = 4x^3 - 15x^2 + 2x + 7$ á bilinu $[0, 3]$.

3 $h(x) = |x+1| + |x-1|$ á $[-2, 2]$.

4 $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ á bilinu $[-1, 2]$.

5 $g(x) = \dfrac{1-x}{x^2+3}$ á bilinu $[-2, 5]$.

6 $f(\theta) = \theta + \sin\theta$ á bilinu $[-2\pi, 2\pi]$.

7 Gerið grein fyrir að þriðja stigs margliða

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

geti haft engan, einn eða tvo stöðupunkta en ekki fleiri.

8 100 cm langur vírbútur er klipptur í tvennt. Annar hlutinn er beygður í hring, en ferningur búinn til úr hinum hlutanum. Hvernig á að klippa vírinn til þess að samanlagt flatarmál ferningsins og hringsins verði

(a) sem mest?

(b) sem minnst?

9 Trapísa er innrituð í hring með geisla 2, þannig að lengri samsíða hliðin liggi í gegnum miðpunkt hringsins. Hvert er stærsta mögulega flatarmál slíkrar trapísu?

10 Sívalningur er innritaður í kúlu með geisla R. Hvert þarf hlutfallið milli hæðar og geisla sívalningsins að vera, til þess að rúmmál hans verði sem mest? Hvert er þá hlutfallið milli rúmmáls kúlunnar og rúmmáls sívalningsins?

11 Maður er staddur á lítilli eyju sem er í 2 km fjarlægð frá langri beinni strandlengju. Hann vill komast á sem stystum tíma til þorps á ströndinni, sem er 6 km frá þeim stað á ströndinni sem er næstur eyjunni. Hvar ætti hann að koma að landi, ef hann getur róið á 10 km hraða á klst og hlaupið á 20 km hraða á klst?

12 Hvert er mesta mögulegt rúmmál réttrar hringlaga keilu með hliðarlengd 10? [*Rétt hringlaga keila* er keila sem hefur hringskífu sem grunnflöt og uppfyllir jafnframt það skilyrði að línan gegnum topppunkt keilunnar og miðju hringskífunnar er hornrétt á planið sem hringskífan liggur í.]

13 Garðyrkjumaður vill búa til vatnsrennu sem hefur trapísulaga þverskurð. Hliðar rennunnar halla báðar jafnmikið og eru jafnbreiðar botninum, sem er 6 cm breiður. Hvernig eiga hliðarnar að halla til þess að sem mest vatn geti flætt um rennuna?

14 Keila er búin til með því að skera hringgeira úr hringskífu með geisla R og líma brúnirnar saman á bútnum sem eftir verður. Hvert er hámarksrúmmál slíkrar keilu?

15 Bóndi nokkur vill girða af rétthyrnt svæði. Einnig vill hann skipta svæðinu í tvo rétthyrnda hluta með viðbótargirðingu. Heildarsvæðið þarf að vera 2 hektarar (20 000m^2). Hvernig á svæðið að vera í laginu til þess að þetta kosti bóndann minnst girðingarefni?

4.3 Meðalgildissetningin

Við höldum áfram að skoða hvernig upplýsingar um afleiðu falls geta gefið upplýsingar um fallið sjálft. *Meðalgildissetningin* segir að mismun fallgilda í tveim punktum megi skrifa sem margfeldi fjarlægðarinnar milli punktana og gildis afleiðunnar einhvers staðar milli þeirra.

Við byrjum á einföldu tilfelli af meðalgildissetningunni.

Setning 4.3.1 (Rolle)**.** *Látum f vera samfellt fall á lokuðu bili $[a, b]$ og gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt á (a, b). Ef $f(a) = f(b)$ þá er til c úr (a, b) þannig að $f'(c) = 0$.*

Sönnun. Látum M vera stærsta gildið sem f tekur á $[a, b]$ og m vera minnsta gildið sem f tekur á $[a, b]$. Ef $M > f(a)$ þá er til c úr (a, b) þannig að $f(c) = M$ og því $f'(c) = 0$ samkvæmt setningu 4.2.2. Ef $m < f(a)$, þá er til c úr (a, b) þannig að $f(c) = m$ og því $f'(c) = 0$ samkvæmt setningu 4.2.2. Ef $m = M = f(a)$ þá er f fastafall og því $f'(c) = 0$ fyrir öll c úr (a, b). $\square$

Setning 4.3.2 (Meðalgildissetningin)**.** *Látum f vera samfellt fall á $[a, b]$ og gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt á (a, b). Þá er til c úr (a, b) þannig að*

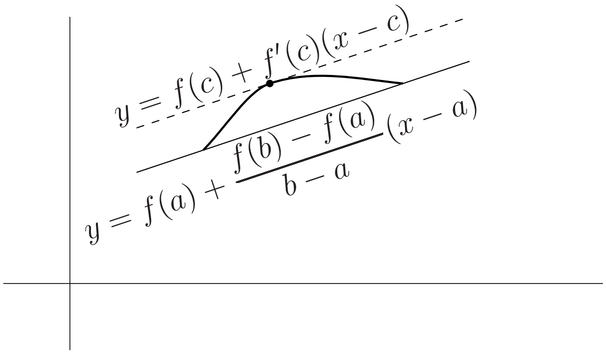
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Sönnun. Skilgreinum fall $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ með

$$\phi(x) = f(x) - (f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a))$$

Ljóst er að fallið ϕ er samfellt á $[a, b]$ og diffranlegt á (a, b). Einnig er fljótséð að $\phi(a) = \phi(b) = 0$ svo samkvæmt setningu Rolle er til c úr (a, b) þannig að $\phi'(c) = 0$. En $\phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ og því $f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$. $\square$

Athugasemd. Setningin segir okkur að til sé c þar sem snertilínan er samsíða línunni gegnum punktana $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$, sbr. mynd (4.3).



Mynd 4.3: Meðalgildissetningin

Dæmi 4.3.3. Finnum $\lim\limits_{x\to+\infty}((x+1)^{1/3} - x^{1/3})$.

Úrlausn. Setjum $f(x) = x^{1/3}$. Þá er $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ ef $x \neq 0$. Samkvæmt meðalgildissetningu er, fyrir sérhvert $x > 0$, til tala c_x þannig að $x < c_x < x+1$ og $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)((x+1) - x) = f'(c_x)$. Við fáum því

$$0 \le (x+1)^{1/3} - x^{1/3} = \frac{1}{3c_x^{2/3}} < \frac{1}{3x^{2/3}} \to 0$$

þegar $x \to +\infty$. Samkvæmt klemmureglu fæst því $\lim\limits_{x\to+\infty}((x+1)^{1/3} - x^{1/3}) = 0$

Dæmi 4.3.4. Finnum þau s úr $\mathbb{Q}$ þannig að runan $(((n+1)^2+1)^s - (n^2+1)^s)_{n=1}^{\infty}$ sé samleitin.

Úrlausn. Ef $s = 0$ þá eru allir liðir rununnar 0. Ef $s \neq 0$ þá setjum við $f(x) = (x^2+1)^s$. Þá er $f'(x) = s(x^2+1)^{s-1} \cdot 2x$. Samkvæmt meðalgildissetningunni er, fyrir sérhvert n, til tala ξ_n á bilinu $(n, n+1)$ þannig að

$$\begin{aligned}
((n+1)^2+1)^s - (n^2+1)^s &= f(n+1) - f(n) \\
&= f'(\xi_n)((n+1) - n) \\
&= f'(\xi_n) \\
&= s(\xi_n^2+1)^{s-1} 2\xi_n.
\end{aligned}$$

Við fáum því

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}((n+1)^2+1)^s-(n^2+1)^s\\
=&\lim_{n\to+\infty}s(\xi_n^2+1)^{s-1}2\xi_n\\
=&\lim_{n\to+\infty}s(\frac{\xi_n^2+1}{\xi_n^2})^{s-1}\cdot\xi_n^{2(s-1)}2\xi_n\\
=&\,2\cdot s\lim_{n\to+\infty}(\frac{\xi_n^2+1}{\xi_n^2})^{s-1}\cdot\lim_{n\to+\infty}\xi_n^{2s-1}\\
=&\,2s\cdot 1\cdot\lim_{n\to+\infty}\xi_n^{2s-1}
\end{aligned}$$

Þar sem ljóst er að $\lim_{n\to+\infty}\xi_n=+\infty$ þá sjáum við að markgildi rununnar er 0 ef $s<1/2$, 1 ef $s=1/2$ og $+\infty$ ef $s>1/2$.

Til er almennari útgáfa af meðalgildissetningunni svokölluð *meðalgildissetning Cauchys*.

Setning 4.3.5 (Meðalgildissetning Cauchys)**.** *Látum f og g vera samfelld föll á lokuðu bili $[a,b]$ og diffranleg á (a,b). Þá er til c úr (a,b) þannig að*

$$(f(b)-f(a))\,g'(c)=(g(b)-g(a))\,f'(c)$$

Sönnun. Ef $g(b)=g(a)$ þá er samkvæmt setningu Rolle til $c\in(a,b)$ þannig að $g'(c)=0$ og þá gildir augljóslega að

$$(f(b)-f(a))\,g'(c)=(g(b)-g(a))\,f'(c).$$

Við megum því gera ráð fyrir að $g(b)\neq g(a)$. Skilgreinum fall $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ með

$$\phi(x)=f(x)-\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))\right).$$

Þar sem bæði föllin f og g eru samfelld á $[a,b]$ og diffranleg á (a,b) er ljóst að svo gildir einnig um fallið ϕ. Ennfremur er $\phi(a)=\phi(b)=0$, svo samkvæmt setningu Rolle er til $c\in(a,b)$ þannig að $\phi'(c)=0$. En

$$\phi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)$$

og því $(g(b)-g(a))f'(c)=(f(b)-f(a))g'(c)$. ∎

Setning 4.3.6. *Látum f vera samfellt fall á $[a,b]$ og gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt á (a,b).*

(i) *Ef $f'(x) > 0$ fyrir öll x úr (a,b), þá er f stranglega vaxandi á $[a,b]$.*
(ii) *Ef $f'(x) < 0$ fyrir öll x úr (a,b), þá er f stranglega minnkandi á $[a,b]$.*
(iii) *Ef $f'(x) = 0$ fyrir öll x úr (a,b), þá er f fastafall á $[a,b]$.*

Sönnun. (i) Ef x og y eru úr $[a,b]$ og $x < y$ þá er til c þannig að $x < c < y$ og $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$.
En $f'(c) > 0$ og $y - x > 0$ svo að $f(y) - f(x) > 0$ og þar með $f(y) > f(x)$.
(ii) Sannað á svipaðan hátt og (i).
(iii) Ef x er úr (a,b) þá er til c þannig að $a < c < x$ og $f(x) - f(a) = f'(c)(x-a) = 0$. En það hefur í för með sér að $f(x) = f(a)$.

□

Setning 4.3.7. *Látum f vera samfellt fall á $[a,b]$, látum $a', b' \in (a,b)$ með $a' < b'$ og gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt á (a', b') nema hugsanlega í einum punkti c úr (a', b').*

(i) *Ef $f'(x) > 0$ fyrir öll x úr (a', c) og $f'(x) < 0$ fyrir öll x úr (c, b') þá tekur f staðbundið hágildi í punktinum c.*
(ii) *Ef $f'(x) < 0$ fyrir öll x úr (a', c) og $f'(x) > 0$ fyrir öll x úr (c, b') þá tekur f staðbundið lággildi í punktinum c.*

Sönnun. (i) Samkvæmt síðustu setningu gildir að f er stranglega vaxandi á $[a,c]$ svo að $f(x) < f(c)$ fyrir öll x úr $[a', c)$ og f er stranglega minnkandi á $[c, b']$ svo að $f(c) > f(x)$ fyrir öll x úr $(c, b']$. Þar með er $f(x) < f(c)$ fyrir öll $x \neq c$ úr $[a', b']$.
(ii) Sannað á svipaðan hátt og (i).

□

Setning 4.3.8. *Látum f vera fall sem er diffranlegt á opnu bili nema hugsanlega í einum punkti c á bilinu. Ef $\lim_{x\to c^-} f'(x)$ og $\lim_{x\to c^+} f'(x)$ eru til þá er fallið f diffranlegt í punktinum c þá og því aðeins að f sé samfellt í c og*

$$\lim_{x\to c^-} f'(x) = \lim_{x\to c^+} f'(x)$$

Sönnun. Við vitum að fall sem er diffranlegt í c er samfellt í c. Við getum því gert ráð fyrir því að fallið f sé samfellt í c. Við þurfum þá að sanna að fallið f sé diffranlegt í c þá og því aðeins að $\lim_{x\to c^-} f'(x) = \lim_{x\to c^+} f'(x)$

Látum x vera punkt á bilinu þannig að $x < c$. Þá gildir samkvæmt meðalgildissetningu að til er punktur t á bilinu (x, c) þannig að $f(c) - f(x) = f'(t)(c - x)$ og því

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{-f'(t)(c - x)}{x - c} = f'(t).$$

Af þessu leiðir að

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{t \to c^-} f'(t).$$

Á sama hátt fæst að

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{t \to c^+} f'(t).$$

Við getum því ályktað að markgildið $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ er til þá og því aðeins að $\lim_{x \to c^-} f'(x) = \lim_{x \to c^+} f'(x)$. □

Dæmi 4.3.9. Lítum á fallið

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{ef } x \leq 1 \\ x^2 & \text{ef } x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 - 1 = 1$ og $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1^2 = 1$, svo að f er samfellt í punktinum $x = 1$ og þar með á öllu $\mathbb{R}$. Ljóst er að $f'(x) = -1$ ef $x < 1$ og $f'(x) = 2x$ ef $x > 1$ og því $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -1$, $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = 2$. Við getum því ályktað út frá setningu 4.3.8 að f er ekki diffranlegt í $x = 1$. Ennfremur gildir $f'(x) < 0$ ef $x < 1$ og $f'(x) > 0$ ef $x > 1$ svo samkvæmt setningu 4.3.7 tekur f lægsta gildi sitt í $x = 1$ á sérhverju bili $[-M, M]$. Með því að láta $M \to +\infty$ fáum við þá að lægsta gildið sem f tekur á $\mathbb{R}$ er í $x = 1$.

Hærri afleiður: Látum f vera fall sem er diffranlegt á opnu bili. Ef f' er diffranlegt fall þá táknum við afleiðu þess með f'' o.s.frv. Almennt táknum við n-tu afleiðu f , ef hún er til, með $f^{(n)}$, $D^n f$, $\frac{d^n f}{dx^n}$ eða $\frac{d^n y}{dx^n}$. Þá er sagt að f *sé n sinnum diffranlegt á bilinu.* Ef f er n sinnum diffranlegt fyrir sérhvert n þá er f sagt vera *óendanlega oft diffranlegt á bilinu.*

Dæmi 4.3.10. Setjum

$$f(x) = \begin{cases} x^6 & \text{ef } x \leq 0 \\ x^8 & \text{ef } x > 0 \end{cases}$$

Ljóst er að f er samfellt fall á $\mathbb{R}$ sem er óendanlega oft diffranlegt á $\mathbb{R} \setminus 0$. Fyrir $x < 0$ fæst: $f'(x) = 6x^5, f''(x) = 6 \cdot 5x^4, \cdots, f^{(6)} = 6!$ og $f^{(n)}(x) = 0$ ef $n \geq 7$. Fyrir $x > 0$ fæst: $f'(x) = 8x^7, f''(x) = 8 \cdot 7x^6, \cdots, f^{(8)} = 8!$ og $f^{(n)} = 0$ ef $n \geq 9$. Með því að beita setningu 4.3.8 fæst þá að f er 5 sinnum diffranlegt í $x = 0$ og $f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(5)} = 0$. Hins vegar er f ekki 6 sinnum diffranlegt í $x = 0$ vegna þess að $\lim_{x\to 0^-} f^{(6)}(x) = \lim_{x\to 0^-} 6! = 720$ en $\lim_{x\to 0^+} f^{(6)}(x) = \lim_{x\to 0^+} 8 \cdot 7 \cdots 3 \cdot x^2 = 0$. Niðurstaðan er því sú að fallið f er óendanlega oft diffranlegt í $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en einungis 5 sinnum diffranlegt í $x = 0$.

Setning 4.3.11. *Látum f vera tvisvar sinnum diffranlegt fall á bili (a, b) og c vera stöðupunkt fallsins f.*

(i) *Ef $f''(x) < 0$ fyrir öll x úr (a, b) þá tekur f hágildi í punktinum c.*

(ii) *Ef $f''(x) > 0$ fyrir öll x úr (a, b) þá tekur f lággildi í punktinum c.*

Sönnun. (i) Í þessu tilfelli er f' minnkandi á (a, b). En $f'(c) = 0$ svo að $f'(x) > 0$ fyrir öll x úr (a, c) og $f'(x) < 0$ fyrir öll x úr (c, b) . Samkvæmt setningu 4.3.7 tekur þá f hágildi í punktinum c.

(ii) Sannað á samsvarandi hátt.

□

Athugasemd. Ef f'' er samfellt í punktinum c þá er til opið bil um c þar sem f'' hefur sama formerki og $f''(c)$. Þar með fæst: Ef $f'(c) = 0$ þá tekur f staðbundið hágildi í c ef $f''(c) < 0$ en staðbundið lággildi í c ef $f''(c) > 0$.

Skilgreining 4.3.12. Látum g vera fall á $[a, b]$. Ef fyrir öll x_1 og x_2 úr $[a, b]$ og fyrir öll α þannig að $0 < \alpha < 1$ gildir

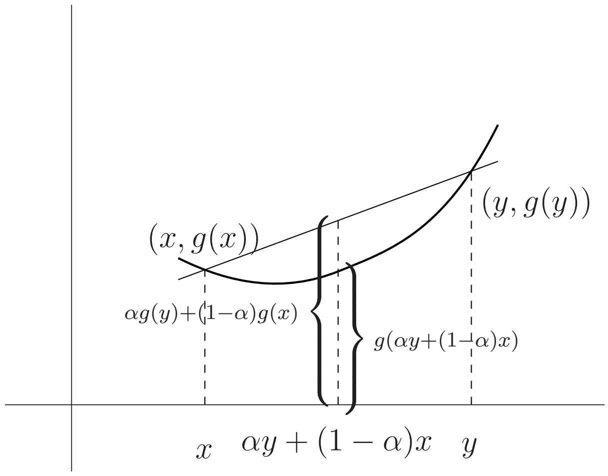
(i)
$$g(\alpha x_2 + (1 - \alpha)x_1) \leq \alpha g(x_2) + (1 - \alpha)g(x_1) \tag{1}$$

þá segjum við að g sé *kúpt fall*; (sjá mynd 4.4)

(ii)
$$g(\alpha x_2 + (1 - \alpha)x_1) \geq \alpha g(x_2) + (1 - \alpha)g(x_1) \tag{2}$$

þá segjum við að g sé *íhvolft fall* (sjá mynd 4.5).

Við segjum að fallið g sé *stranglega kúpt* ef setja má $<$ í stað $\leq$ í ójöfnu (1) og við segjum að það sé *stranglega íhvolft* ef setja má $>$ í stað $\geq$ í ójöfnu (2).



Mynd 4.4: Kúpt fall

Athugasemd. Ef við förum eftir fallriti fallsins g í stefnu vaxandi x, þá erum við í „vinstri beygju“ þegar fallið er kúpt og í „hægri beygju“ þegar fallið er íhvolft.

Setning 4.3.13. *Látum f vera samfellt fall á $[a, b]$ og gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt á (a, b). Ef f' er vaxandi á (a, b) þá er f kúpt á $[a, b]$. Á sama hátt ef f' er minnkandi á (a, b) þá er f íhvolft á $[a, b]$.*

Sönnun. Gerum ráð fyrir að f' sé vaxandi á (a, b). Látum x og x' vera úr $[a, b]$ þannig að $x < x'$ og α vera úr $(0, 1)$. Setjum $z = \alpha x' + (1-\alpha)x$. Viljum sýna að

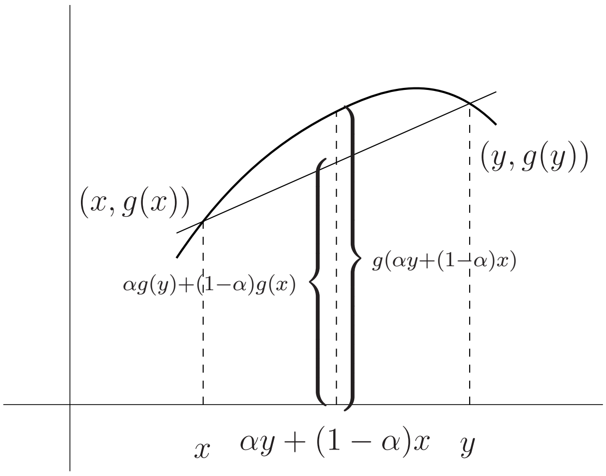
$$f(z) \leq \alpha f(x') + (1-\alpha)f(x).$$

Nú er $f(z) = \alpha f(z) + (1-\alpha)f(z)$ svo okkur nægir að sýna að

$$(1-\alpha)(f(z) - f(x)) \leq \alpha(f(x') - f(z)). \tag{3}$$

Samkvæmt meðalgildissetningu eru til c og d þannig að

$$\begin{aligned} x < c < z \quad &\text{og} \quad f(z) - f(x) = f'(c)(z-x), \\ z < d < x' \quad &\text{og} \quad f(x') - f(z) = f'(d)(x'-z). \end{aligned}$$



Mynd 4.5: Íhvolft fall

Nú er $f'(c) \leq f'(d)$ vegna þess að f' er vaxandi og þar sem

$$\alpha z + (1-\alpha)z = \alpha x' + (1-\alpha)x$$

þá fæst $(1-\alpha)(z-x) = \alpha(x'-z)$. Af þessu leiðir

$$\begin{aligned}(1-\alpha)[f(z)-f(x)] &= (1-\alpha)f'(c)(z-x)\\ &\leq (1-\alpha)f'(d)(z-x)\\ &= \alpha f'(d)(x'-z)\\ &= \alpha[f(x')-f(z)]\end{aligned}$$

og þar með er sýnt að (3) er rétt. Ef f' er minnkandi á (a,b) þá er sannað á svipaðan hátt að f er íhvolft á $[a,b]$. □

Athugasemd. Unnt er að sýna fram á að leiðingarnar í síðustu setningu gilda í báðar áttir. Þar með fæst að ef f er tvídiffranlegt á (a,b) þá gildir

(i) $f''(x) \geq 0$ fyrir öll x úr (a,b) þá og því aðeins að f' sé vaxandi á (a,b) þá og því aðeins að f sé kúpt á $[a,b]$.

(ii) $f''(x) > 0$ fyrir öll x úr (a,b) þá og því aðeins að f' sé stranglega vaxandi á (a,b) þá og því aðeins að f sé stranglega kúpt á $[a,b]$.

(iii) $f''(x) \leq 0$ fyrir öll x úr (a,b) þá og því aðeins að f' sé minnkandi á (a,b) þá og því aðeins að f sé íhvolft á $[a,b]$.

(iv) $f''(x) < 0$ fyrir öll x úr (a,b) þá og því aðeins að f' sé stranglega minnkandi á (a,b) þá og því aðeins að f sé stranglega íhvolft á $[a,b]$.

Skilgreining 4.3.14. Látum f vera samfellt fall á opnu bili og c vera punkt úr bilinu. Ef fallið f er kúpt öðrum megin við punktinn c en íhvolft hinum megin þá segjum við að c sé *beygjuskilapunktur fallsins* f eða *fallið* f *hafi beygjuskil í punktinum* c.

Athugasemd. Nafngiftin „beygjuskil“ er skiljanleg í ljósi athugasemdarinnar við skilgreiningu 4.3.12.

Setning 4.3.15. *Látum f vera samfellt fall á bili (a, b) og látum c vera punkt á bilinu. Ef f er diffranlegt á bilunum (a, c) og (c, b) þá er c beygjuskilapunktur fallsins f ef annað hvort*

(i) *f' er vaxandi á (a, c) og minnkandi á (c, b) eða*

(ii) *f' er minnkandi á (a, c) og vaxandi á (c, b)*

Sönnun. Leiðir beint af setningu 4.3.13. □

Athugasemd. Ef f er tvídiffranlegt á bilunum (a, c) og (c, b) þá er c beygjuskilapunktur ef annað hvort eftirtalinna skilyrða er uppfyllt.

(i) $f''(x) < 0$ fyrir $x < c$ og $f''(x) > 0$ fyrir $x > c$,

(ii) $f''(x) > 0$ fyrir $x < c$ og $f''(x) < 0$ fyrir $x > c$.

Ef að auki f er tvídiffranlegt í c og f'' er samfellt í c og c er beygjuskilapunktur þá gildir nauðsynlega $f''(c) = 0$.

Aðvörun. $f''(c) = 0$ þarf ekki nauðsynlega að þýða að c sé beygjuskilapunktur fallsins f. Til dæmis hefur fallið $f(x) = x^4$ ekki beygjuskil í $x = 0$ en $f''(0) = 0$.

Verkefni 4.3

1 Sannið að ójafnan

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

sé rétt fyrir öll x og y.

2 Látum $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Fyrir sérhvert bil $[a, b]$ er til c úr (a, b) þ.a. $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Sýnið að þetta c liggur mitt á milli a og b.

3 Látum $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $a = -1$ og $b = 1$.

(a) Sýnið að ekki sé til neinn punktur $c \in (a, b)$ þannig að

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(b) Útskýrið hvers vegna þetta er ekki í mótsögn við meðalgildissetninguna.

4 Látum a, b, c og d vera rauntölur. Sýnið að jafnan

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

geti í mesta lagi haft eina rauntölulausn, ef $b^2 - 3ac < 0$.

5 Látum $f(x) = x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Sýnið að jafnan $f(x) = 0$ geti ekki haft fleiri en þrjár ólíkar rauntölulausnir ef $2a^2 < 5b$. [Ábending: Skoðið $f'''(x)$.]

Í dæmum 6-11 skal finna á hvaða bilum tiltekin föll eru stranglega vaxandi eða stranglega minnkandi og finna staðbundin lággildi og hágildi þeirra. Finnið svo hvar föllin eru kúpt eða íhvolf og finnið beygjuskil. Notið niðurstöðurnar til að teikna gröf fallanna.

6 $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 18x + 5$

7 $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$

8 $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$

9 $f(x) = x\sqrt{6 - x}$

10 $f(x) = x + \cos x$

11 $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

12 Sýnið að á fallriti þriðja stigs margliðu séu nákvæmlega ein beygjuskil.

13 Sýnið að á fallriti 4. stigs margliðu séu annað hvort engin beygjuskil eða nákvæmlega tvenn beygjuskil.

14 Sýnið að um fallið $f(x) = x^4$ gildi $f''(0) = 0$ þó svo $x = 0$ sé ekki beygjuskilapunktur fyrir f.

15 Sýnið að fallið $g(x) = x|x|$ hafi beygjuskil í punktinum $x = 0$ en að $g''(0)$ sé ekki til.

16 Skilgreinum fall f með

$$f(x) = \begin{cases} x(1-\cos x), & \text{ef } x \leq 0 \\ x^3, & \text{ef } x > 0. \end{cases}$$

Hversu oft er fallið f diffranlegt í punktinum $x = 0$?

17 Látum f vera samfellt kúpt fall á lokuðu bili $[a, b]$ og gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt á opna bilinu (a, b). Sýnið að f' sé vaxandi á (a, b). [Ábending: Sýnið að fyrir öll x og y úr bilinu (a, b) þannig að $x < y$ gildi

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y).\Big]$$

4.4 Nálgun diffranlegra falla með margliðum

0

Markgildi eins og $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ geta verið til þótt $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, Sem dæmi getum við tekið $\lim_{x\to 0} \sin x/x$. Næsta niðurstaða kemur oft að gagni við tilfelli eins og þessi.

Setning 4.4.1 (Markgildisregla de l'Hôpital). *Látum f og g vera diffranleg föll á (a, b) og $g'(x) \neq 0$ fyrir öll x úr (a, b); $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Gerum ráð fyrir*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

þar sem L er einhver rauntala eða $+\infty$ eða $-\infty$. Þá gildir:

(i) *Ef $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, þá er*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

(ii) *Ef $\lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$, þá er*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Setningin er einnig rétt ef í stað $\lim_{x\to a^+}$ kemur alls staðar $\lim_{x\to b^-}$.

Aðvörun. $\frac{f(x)}{g(x)}$ getur haft markgildi þó svo $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ hafi ekkert markgildi þegar $x \to a^+$. Til dæmis sést auðveldlega með því að nota klemmuregluna að $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\sin(1/x)}{x} = 0$. En $\frac{D(x^2\sin(1/x))}{Dx} = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ hefur ekkert markgildi þegar $x \to 0^+$.

Athugasemdir. (i) Þar sem ofangreind markgildisregla gildir jafnt fyrir hægri og vinstri markgildi þá gildir hún einnig fyrir tvíhliða markgildi (sjá setningu 3.2.1).

(ii) Í tilfelli (ii) í setningunni má $-\infty$ koma í staðinn fyrir $+\infty$ því að $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)}$.

Dæmi 4.4.2. Reiknum $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)-1}{x^3\sin x}$ með því að nota reglu de l'Hôpital.

Úrlausn. Við beitum reglu l'Hôpital nokkrum sinnum:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)-1}{x^3\sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{-2x\sin(x^2)}{3x^2\sin x + x^3\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(x^2)}{3x\sin x + x^2\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-4x\cos(x^2)}{3\sin x + 3x\cos x + 2x\cos x - x^2\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos(x^2)}{3\frac{\sin x}{x} + 5\cos x - x\sin x} \\
&= \frac{-4}{3+5-0} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Dæmi 4.4.3. Í þessu dæmi koma fyrir atriði sem fjallað er um aftar í bókinni. Flestir lesendur ættu þó að hafa það góða undirstöðuþekkingu að þeir geti skilið lausnina. Reiknum

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} \int_1^x \sin t \cdot \frac{e^t}{t}\, dt.$$

Úrlausn.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\int_1^x \sin t\cdot\frac{e^t}{t}\,dt &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x \sin t\cdot\frac{e^t}{t}\,dt}{e^x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x\cdot\frac{e^x}{x}}{e^x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sönnun á reglu de l'Hôpital. (i) Við látum okkur nægja að athuga tilfellið $-\infty < a$. Setjum $f(a) = g(a) = 0$. Þá eru f og g samfelld á $[a, b)$. Fyrir sérhvert x úr (a, b) eru föllin f og g samfelld á $[a, x]$ og diffranleg á (a, x) svo samkvæmt meðalgildissetningu Cauchys (setning 4.3.5) er til z úr (a, x) þannig að

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(z)(x-a)}{g'(z)(x-a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Þar sem $z \to a^+$ þegar $x \to a^+$ þá fæst

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z\to a^+}\frac{f'(z)}{g'(z)} = L.$$

(ii) Við látum okkur nægja að athuga tilfellið $b = +\infty$ og $-\infty < L < +\infty$. Við gefum okkur því að

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \text{og} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

og viljum sýna að

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Við látum $x_n \to \infty$ og sýnum fram á að $\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$.
Við byrjum á að búa til samleitna runu (y_n) sem stefnir líka á $+\infty$ með þeim eiginleika að

$$\lim\frac{f(y_n)}{g(y_n)} = 0 \quad \text{og} \quad \lim\frac{g(y_n)}{g(y_n)} = 0.$$

(Sjá Dæmi 4.4.18). Síðan notum við meðalgildissetningu Cauchys og veljum við fyrir sérhvert n tölu ξ_n milli y_n og x_n, þannig að

$$\frac{f(x_n)-f(y_n)}{g(x_n)-g(y_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Deilum með $g(x_n)$ í nefnara og teljara vinstra megin,

$$\frac{\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - \frac{f(y_n)}{g(x_n)}}{1 - \frac{g(y_n)}{g(x_n)}} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Margföldum með nefnara vinstri hliðar báðum megin,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - \frac{f(y_n)}{g(x_n)} = \Big(1 - \frac{g(y_n)}{g(x_n)}\Big) \cdot \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Færum seinni liðinn í vinstri hlið yfir,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \Big(1 - \frac{g(y_n)}{g(x_n)}\Big) \cdot \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} - \frac{f(y_n)}{g(x_n)}.$$

Þar sem ξ_n er á milli y_n og x_n fyrir sérhvert n, þá stefnir runan (ξ_n) líka á $+\infty$. Þar með er ljóst að hægri hlið jöfnunnar stefnir á L og þá vinstri hlið líka.

□

Nálganir með margliðum eru áhugaverðar við tölulega útreikninga á gildum falla. Slíkar nálganir hafa einnig fræðilegt gildi. Við ætlum hér að athuga Taylor-liðun falls f en það er ákveðin tegund margliðunálgunar.

Þegar við skilgreindum afleiðu þá sáum við, á mynd 4.1 að línan gegnum punktinn $(a, f(a))$ með hallatölu $f'(a)$ gefur góða nálgun á $f(x)$ í grennd við a. Þetta má orða á annan hátt: $P(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ er sú 1. stigs margliða, sem nálgar fallið f best í grennd við a. Við tökum eftir því að

$$P(a) = f(a) \quad \text{og} \quad P'(a) = f'(a).$$

Gerum nú ráð fyrir því, að f sé diffranlegt n-sinnum á opnu bili I og látum $a \in I$. Við leitum að margliðu $P(x) = \mathrm{T}_n f(x; a)$ af stigi n, sem nálgar f vel í grennd við a. Við veljum þá leið að krefjast þess að n fyrstu afleiður p í a skuli vera þær sömu og n fyrstu afleiður f í a (þetta gaf góða raun þegar $n = 1$).

Setning 4.4.4. *Látum f vera n-sinnum diffranlegt fall á opnu bili og a vera punkt úr bilinu. Þá er til nákvæmlega ein margliða $P(x)$ af stigi n eða lægra þannig að*

$$P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a), \ldots, P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a), \tag{1}$$

það er að segja

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n.$$

Skilgreining 4.4.5. Margliðan í setningunni hér að ofan (setningu 4.4.4) kallast *n-ta Taylor-margliða fallsins f í punktinum a.* Hún verður ýmist táknuð með $\mathrm{T}_n f(x;a)\mathrm{T}_n f(x)$ eða $\mathrm{T}_n f$ eftir því hversu mikillar nákvæmni er þörf. Einnig er stundum notaður rithátturinn $\mathrm{T}_n(f(x);a)$hentar betur.

Sönnun á setningu 4.4.4. Ljóst er að margliðan

$$\mathrm{T}_n f(x;a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

uppfyllir (1). Gerum ráð fyrir að $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ uppfylli (1). Skrifum

$$\begin{aligned} P(x) &= P((x-a)+a) \\ &= a_0 + a_1((x-a)+a) + \cdots + a_n((x-a)+a)^n \\ &= b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n. \end{aligned}$$

Fyrir $k = 0, \ldots, n$ gildir samkvæmt (1):

$$P^{(k)}(a) = k!b_k = f^{(k)}(a)$$

og því

$$b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Þar með er sannað að $\mathrm{T}_n f(x;a)$ er eina n-ta stigs margliðan sem uppfyllir (1). $\square$

Setning 4.4.6. *Látum f og a vera eins og í síðustu setningu. Fyrir margliðu $P(x)$ af stigi mest n gildir að $P(x) = \mathrm{T}_n f(x;a)$ þá og því aðeins að*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0. \qquad (2)$$

Sönnun. Með því að beita reglu de l'Hôpital $(n-1)$-sinni fæst:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\mathrm{T}_nf(x;a)}{(x-a)^n}\\
&=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-(T_nf)'(x)}{n(x-a)^{n-1}}\\
&=\cdots=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-(\mathrm{T}_nf)^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}\\
&=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)-f^{(n)}(a)(x-a)}{n!(x-a)}\\
&=\lim_{x\to a}\frac{1}{n!}\Big(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}-f^n(a)\Big)\\
&=\frac{1}{n!}(f^n(a)-f^n(a))=0.
\end{aligned}$$

Af þessu leiðir að T_nf uppfyllir (2). Ef $P(x)$ er n-ta stigs margliða sem uppfyllir (2) þá fæst

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}&=\frac{f(x)-\mathrm{T}_nf(x)+\mathrm{T}_nf(x)-P(x)}{(x-a)^n}\\
&=\frac{f(x)-\mathrm{T}_nf(x)}{(x-a)^n}+\frac{\mathrm{T}_nf(x)-P(x)}{(x-a)^n}.
\end{aligned}$$

En af þessu leiðir

$$\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{T}_nf(x)-P(x)}{(x-a)^n}=0.$$

Þetta þýðir að a er $(n+1)$-föld rót margliðunnar $\mathrm{T}_nf(x)-P(x)$ sem er margliða af stigi mest n svo $\mathrm{T}_nf(x)-P(x)$ er núllmargliðan, það er $\mathrm{T}_nf(x)=P(x)$ fyrir öll x. □

Skilgreining 4.4.7. Setjum $\mathrm{R}_n(x;a)=f(x)-\mathrm{T}_nf(x;a)$ og skrifum

$$f(x)=\mathrm{T}_nf(x;a)+\mathrm{R}_n(x;a);\quad \lim_{x\to a}\frac{\mathrm{R}_n(x;a)}{(x-a)^n}=0.$$

Þessi framsetning kallast *Taylor-formúla fyrir f í a* og $\mathrm{R}_n(x;a)$kallast *restlið- ur* eða *leif af stigi n*. Oft ritum við $\mathrm{R}_n(x)$ í stað $\mathrm{R}_n(x;a)$ ef ljóst er af samhengi um hvaða a er rætt.

Athugasemd. Ef f er eins og í síðustu setningu og $P(x)$ er margliða af stigi minna eða jafnt n þannig að $f(x) = P(x) + R(x)$ þar sem R er fall á opnu bili sem inniheldur a og uppfyllir

$$\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

þá leiðir af setningunni að $P(x) = \mathrm{T}_n f(x; a)$.

Setning 4.4.8 (Reiknireglur fyrir Taylor-margliður)**.**

(i) *Ef f og g eru n-sinnum diffranleg föll á opnu bili og λ og μ eru rauntölur þá gildir*

$$\mathrm{T}_n(\lambda f + \mu g) = \lambda \,\mathrm{T}_n f + \mu \,\mathrm{T}_n g.$$

(ii) *Ef f er n-sinnum diffranlegt fall á opnu bili þá er*

$$(\mathrm{T}_n f)' = \mathrm{T}_{n-1} f'.$$

(iii) *Látum f vera n-sinnum diffranlegt fall á opnu bili og a vera punkt úr bilinu. Ef $c \in \mathbb{R} \setminus 0$ og $g(x) = f(c \cdot x)$ þá gildir*

$$\mathrm{T}_n g\left(x; \frac{a}{c}\right) = \mathrm{T}_n f(c \cdot x; a).$$

Sönnun. Eftirlátin lesendum. □

Dæmi 4.4.9. Fljótséð er að fyrir sérhverja heila tölu $n \geq 0$ gildir

$$\sin^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x, \quad \sin^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$$

og

$$\cos^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x, \quad \cos^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x.$$

Sér í lagi fæst

$$\sin^{(2n)}(0) = \cos^{(2n+1)}(0) = 0 \quad \text{og} \quad \sin^{(2n+1)}(0) = \cos^{(2n)}(0) = (-1)^n.$$

Þar með fáum við Taylor-formúlufyrir sínus og kósínus

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{R}_{2n+2}(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{R}_{2n+1}(x).$$

Dæmi 4.4.10. Fyrir sérhverja rauntölu $x \neq 1$ gildir

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Enn fremur gildir

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \frac{x^{n+1}}{(1-x)x^n} = \frac{x}{1-x} \to 0 \qquad \text{þegar } x \to 0.$$

Samkvæmt athugasemd á eftir setningu 4.4.6 fæst því

$$\mathrm{T}_n\left(\frac{1}{1-x}; 0\right) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Samkvæmt (ii) í setningu 4.4.8 fæst með diffrun að

$$\mathrm{T}_{n-1}\left(\frac{1}{(1-x)^2}; 0\right) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

Taylor-margliður má nota við markgildisreikninga:

Dæmi 4.4.11. Reiknum $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^4 x}{\cos(x^2) - 1}$.

Úrlausn. $\sin x = x + \mathrm{R}_2(x)$ samkvæmt 4.4.9 hér á undan og þar með

$$\begin{aligned}
\sin^4 x &= (x + \mathrm{R}_2(x))^4 \\
&= x^4 + \binom{4}{1} x^3\,\mathrm{R}_2(x) + \binom{4}{2} x^2 (\mathrm{R}_2(x))^2 \\
&\quad + \binom{4}{3} x(\mathrm{R}_2(x))^3 + (\mathrm{R}_2(x))^4.
\end{aligned}$$

Setjum $R(x) = \sin^4 x - x^4$. Nú fæst

$$\frac{R(x)}{x^5} = \binom{4}{1}\frac{\mathrm{R}_2(x)}{x^2} + \binom{4}{2}\frac{(\mathrm{R}_2(x))^2}{x^3} + \binom{4}{3}\frac{(\mathrm{R}_2(x))^3}{x^4} + \frac{(\mathrm{R}_2(x))^4}{x^5} \to 0$$

þegar $x \to 0$. Fyrir $\sin^4 x$ fæst því Taylor-formúlan

$$\sin^4 x = x^4 + \mathrm{R}_5(x).$$

Einnig fæst $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \mathrm{R}_3(y)$ samkvæmt dæmi 4.4.9 hér að framan. Setjum $y = x^2$ og fáum

$$\cos(x^2) - 1 = -\frac{x^4}{2} + \mathrm{R}_3(x^2) = -\frac{x^4}{2} + \mathrm{R}_6(x).$$

Af þessu leiðir

$$\begin{aligned} \frac{\sin^4 x}{\cos(x^2) - 1} &= \frac{x^4 + \mathrm{R}_5(x)}{-\frac{x^4}{2} + \mathrm{R}_6(x)} \\ &= \frac{1 + \frac{\mathrm{R}_5(x)}{x^4}}{-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{R}_6(x)}{x^4}} \\ &\to \frac{1}{-1/2} = -2 \qquad \text{þegar } x \to 0. \end{aligned}$$

Við höfum eftirfarandi formúlur fyrir leifinni $R_n(x)$:

Setning 4.4.12. *(Leifaformúla Lagrange) Gerum ráð fyrir því að fallið f sé $(n+1)$-sinni diffranlegt á opnu bili I og að $a \in I$. Þá gildir um sérhvert $x \in I$ að til er t milli a og x þannig að*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Með öðrum orðum þá er til t milli a og x þannig að

$$\mathrm{R}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-a)^{n+1}.$$

Takið eftir því að síðasti liður hægra megin hér að ofan í formúlunni fyrir $f(x)$ og síðasti liður í $T_{n+1}f(x;a)$ eru

$$\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ og } \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

svo að munurinn á $f(x)$ og $T_{n+1}f(x;a)$ kemur fram í muninum á þessum tveim liðum.

Við sjáum á þessari setningu að ef hægt er að meta afleiður f þá má nota Taylor margliður f til að meta fallgildi f. Þetta á t.d. við um föllin $\sin x$ og $\cos x$.

Sönnun. Setjum

$$g(u) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(u)}{k!}(x-u)^k - R_n(x)\left(\frac{x-u}{x-a}\right)^{n+1}.$$

Fallið g er diffranlegt á bilinu I og

$$\begin{aligned} g'(u) &= -f'(u) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(u)}{k!}(x-u)^k - \frac{f^{(k)}(u)}{(k-1)!}(x-u)^{k-1}\right) \\ &\quad + R_n(x)(n+1)\left(\frac{x-t}{x-a}\right)^n \cdot \frac{1}{x-a}(-1) \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-u)^n + R_n(x)(n+1)\left(\frac{x-t}{x-a}\right)^n \cdot \frac{1}{x-a}(-1), \end{aligned}$$

þar sem um er að ræða kíkissummu í $g'(u)$.

Þar sem $g(a) = g(x) = 0$ er til, samkvæmt setningu Rolle, t milli a og x þannig að $g'(t) = 0$ svo að

$$-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + R_n(x)(n+1)\left(\frac{x-t}{x-a}\right)^n \cdot \frac{1}{x-a}(-1) = 0.$$

Setningin fæst nú með því að einangra $\mathrm{R}_n(x)$ úr þessari jöfnu. □

Setning 4.4.13. *Ef $m \le f^{(n+1)}(t) \le M$ fyrir öll $t \in I$ þá gildir*

$$m\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \le \mathrm{R}_n(x) \le M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{ef } x \in I \text{ og } x > a$$

og

$$\begin{aligned} m\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} &\le (-1)^{n+1}\,\mathrm{R}_n(x) \\ &\le M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{ef } x \in I \text{ og } x < a. \end{aligned}$$

Sönnun. Æfing. Athugið leifaformúlu Lagrange. □

Athugasemd. Fyrir sum föll, eins og t.d. sínus og kósínus er auðvelt að meta afleiðuna $f^{(n+1}$ og þar með er hægt að reikna gildi fallsins.

Setning 4.4.14. *Látum f vera fall á opnu bili og a vera punkt úr bilinu. Gerum ráð fyrir að til sé heil tala $n \geq 2$ þannig að f sé n-sinnum diffranlegt í a, $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ og $f^{(n)}(a) \neq 0$. Þá gildir*

(i) *Ef n er oddatala þá tekur f hvorki staðbundið hágildi né lággildi í punktinum a.*

(ii) *Ef n er jöfn tala og $f^{(n)}(a) < 0$ $\quad (f^{(n)}(a) > 0)$ þá tekur f staðbundið hágildi (lággildi) í punktinum a.*

Sönnun. Setjum $c := \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$ og skrifum $f(x) = f(a) + c \cdot (x-a)^n + \mathrm{R}_n(x)$. Þá fæst að

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = c + \frac{\mathrm{R}_n(x)}{(x-a)^n}.$$

Þar sem $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\mathrm{R}_n(x)}{(x-a)^n} = 0$ þá hefur $\dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n}$ hefur sama formerki og c ef x er nálægt a.

(i) Ef n er oddatala þá hefur $(x-a)^n$ gagnstæð formerki eftir því hvort $x < a$ eða $x > a$. Sama gildir því um $f(x) - f(a)$ nálægt a, það er að segja á bilinu $(a - \delta, a + \delta)$ er $f(x)$ stærra en $f(a)$ öðru megin við a en minna en $f(a)$ hinum megin við a. Af þessu drögum við þá ályktun að f tekur hvorki staðbundið hágildi né staðbundið lággildi í punktinum a.

(ii) Ef n er jöfn tala þá er $(x-a)^n > 0$ ef $x \neq a$ og þar með hefur $f(x) - f(a)$ sama formerki og c nálægt a. Út frá því getum við ályktað:

Ef $c < 0$ þá er $f(x) < f(a)$ fyrir x nálægt a, og þar með tekur f staðbundið hágildi í punktinum a. Ef $c > 0$ þá er $f(x) > f(a)$ fyrir x nálægt a, og þar með tekur f staðbundið lággildi í punktinum a.

□

Dæmi 4.4.15. Lítum á fallið

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - x} - x - \sin(x^2).$$

Fljótséð er að $f'(0) = 0$. Könnum nú hvort fallið f taki staðbundið hágildi eða staðbundið lággildi í punktinum $x = 0$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathrm{R}_4(x)\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + \mathrm{R}_3(x)\right) \\
&\quad - x - \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \mathrm{R}_6(x)\right) \\
&= x + x^2 + x^3 + x^4 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + \mathrm{R}_4(x) - x - x^2 + \mathrm{R}_4(x) \\
&= \frac{5}{6}x^3 + \mathrm{R}_3(x).
\end{aligned}$$

Þar sem 3 er oddatala þá tekur f hvorki staðbundið hágildi né staðbundið lággildi í punktinum 0.

Verkefni 4.4

Finnið markgildin í dæmum 1-17 í þeim tilfelum þar sem þau eru til.

1 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x + \sin x}$

2 $\displaystyle\lim_{x\to 3\pi/2} \frac{\cos x}{x - 3\pi/2}$

3 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos\sqrt{x}}{x}$

4 $\displaystyle\lim_{y\to 2} \frac{y^6 - 64}{y^4 - 16}$

5 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

6 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{3x + \cos x}$

7 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{4x^2 - x}}$

8 $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{2x - \pi}{\tan 2x}$

9 $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x - 2\cos\pi x}{x^2 - 4}$

10 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}}{x}$

11 $\displaystyle\lim_{x\to\pi} (x - \pi)\cot x$

12 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\sec x$

13 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2}\right)$

14 $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sin t}\right)$

15 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}\right)$

16 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x + 5} - x\right)$

17 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - \frac{x^3}{x^2 + 1}\right)$

18 Lát (x_n) vera runu og g vera fall þannig að $x_n \to +\infty$ og $g(x_n) \to +\infty$. Sýnið fram á tilvist runu (y_n) þannig að $y_n \to +\infty$ og $g(y_n)/f(x_n) \to 0$. (Ábending: Búið rununa til með því að endurtaka stökin í upphaflegu rununni).

19 Látum f vera diffranlegt fall. Sýnið að

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

20 Látum f vera tvídiffranlegt fall. Sýnið að

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

21 Látum a og b vera rauntölur og látum f vera diffranlegt fall þannig að $f(x) \to a$ og $f'(x) \to b$, þegar $x \to \infty$. Sýnið að $b = 0$.

Í dæmum 21-28, skal finna n-ta stigs Taylor-nálgun fallanna í punktinum a. Notið svo leifaformúlu Lagrange til þess að meta hversu góð Taylor-nálgunin er á bilinu $|x| < 0.1$ fyrir föllin í dæmun 21-23.

22 $f(x) = \tan x; \quad a = 0, n = 3$

23 $f(x) = \dfrac{1}{1+x}; \quad a = 0, n = 3$

24 $f(x) = \sin 2x; \quad a = 0, n = 4$

25 $f(x) = \sqrt{1+x}; \quad a = 0, n = 3$

26 $f(x) = \sin x; \quad a = \pi/4, n = 3$

27 $f(x) = \sqrt{x}; \quad a = 4, n = 3$

28 $f(x) = \sqrt{1-x^2}; \quad a = 0, n = 3$

29 $f(x) = \dfrac{1}{x}; \quad a = -1, n = 4$

30 Látum f vera tvídiffranlegt fall á $\mathbb{R}$ með $f(0) = 0$. Skilgreinum fall $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ með

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & \text{ef } x \neq 0 \\ f'(0), & \text{ef } x = 0 \end{cases}$$

Sýnið að fallið g sé diffranlegt í $x = 0$.

31 Setjum $f(x) = (1+x)^c$, þar sem c er fasti. Sýnið að fyrsta stigs Taylor-margliða fallsins f í punktinum 0 er $1 + cx$.
Setjum nú $g(x) = \sqrt{x^4 + x^2} - x^2$. Notið niðurstöðuna hér að ofan til að finna markgildi $g(x)$ þegar $x \to +\infty$.

32 Setjum $f(x) = (x^5 + 7x^4 + 2)^c - x$. Sýnið að aðeins sé til eitt gildi á c þannig að $f(x)$ hafi endanlegt markgild þegar $x \to +\infty$. Finnið þetta gildi á c og markgildið.

Ákvarðið markgildin í dæmum 32-36.

33 $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \sqrt[4]{x^4 - x^2 + 1})$

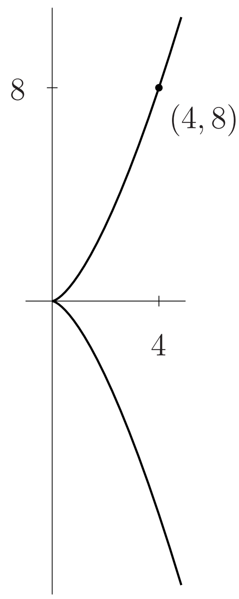
34 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4(\cos\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2x^2})$

35 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)\tan^3(x)x\cos(2x)}{x^2}$

4.5 Fólgin diffrun

Fólgin diffrun er aðferð sem byggir á keðjureglunni. Hún gerir okkur oft kleift að einfalda útreikninga. Við látum okkur nægja að lýsa henni hér með dæmum.

Dæmi 4.5.1. Lítum á ferilinn í $\mathbb{R}^2$ sem skilgreindur er með jöfnunni $y^2 - x^3 = 0$. Ljóst er að punkturinn $(4, 8)$ er á ferlinum. Sagt er að jafnan $y^2 - x^3 = 0$



Mynd 4.6: Ferillinn $y^2 - x^3 = 0$

feli í sér skilgreiningu á y sem fall af x í grennd við punktinn $(4, 8)$ ef til er opið bil um 4 á x-ás og fall f á þessu bili þannig að $f^2(x) - x^3 = 0$. Ljóst er að fallið $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}; x \mapsto x^{3/2}$ fullnægir þessum kröfum. Ef við viljum finna afleiðu y í $x = 4$ þá getum við diffrað fallið $x \mapsto x^{3/2}$ og sett $x = 4$ inn, en við getum líka gert það með *fólginni diffrun*: $y^2 - x^3 = 0$ leiðir af sér að $\frac{d}{dx}(y^2 - x^3) = 0$ en

$$\frac{d}{dx}(y^2 - x^3) = 2y\frac{dy}{dx} - 3x^2 \quad \text{svo að} \quad 2y\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

Setjum nú $(x, y) = (4, 8)$ og fáum $2 \cdot 8 \cdot \frac{dy}{dx}(4) = 3 \cdot 4^2$ og þar með er $\frac{dy}{dx}(4) = \frac{3 \cdot 4 \cdot 4}{2 \cdot 8} = 3$

Dæmi 4.5.2. Tökum nú flóknara dæmi . Unnt er að sýna fram á að jafnan

$$\exp(y \cdot \sin x) - \cos(x \cdot y) = e$$

felur í sér skilgreiningu á y sem falli af x í grennd við punktinn $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Í þessu tilfelli er mjög erfitt að „einangra“ y. Finnum nú afleiðu y í $x = \frac{\pi}{2}$ með fólginni diffrun. Diffrun með tilliti til x gefur

$$\left(\frac{dy}{dx} \cdot \sin x + y \cos x\right) \exp(y \cdot \sin x) + \left(y + x\frac{dy}{dx}\right) \sin(xy) = 0.$$

Setjum $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, 1)$ og fáum

$$\left(\frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0\right) \cdot e + \left(1 + \frac{\pi}{2}\frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$$

og þar með er

$$\left(e + \frac{\pi}{2}\right)\frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

og því

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{e + \frac{\pi}{2}} = \frac{-2}{2e + \pi}.$$

Dæmi 4.5.3. Snúum okkur aftur að ferlinum $y^2 - x^3 = 0$ og beitum fólginni diffrun til að finna þá punkta á ferlinum sem eru í minnstri fjarlægð frá punktinum $(1, 0)$. Nú er fjarlægð punkts (x, y) frá punktinum gefin með $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ svo verkefnið felst í því að finna þá punkta (x, y) þar sem $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ verður sem minnst, að því tilskyldu að $y^2 - x^3 = 0$. Til þess að einfalda útreikninga skulum við athuga $(x-1)^2 + y^2$ í stað $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

Í grennd við sérhvern punkt á ferlinum, annan en punktinn $(0,0)$, getum við litið á y sem diffranlegt fall af x og því einnig á $(x-1)^2+y^2$ sem diffranlegt fall af x. Þar sem $(x-1)^2+y^2$ verður minnst hlýtur að gilda

$$\frac{d}{dx}((x-1)^2+y^2) = 2(x-1)+2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Ennfremur gildir

$$\frac{d}{dx}(y^2-x^3) = 2y\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0.$$

Út úr þessum jöfnum fæst jafnan

$$3x^2 = -2(x-1)$$

sem hefur lausnirnar $x = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$ og $x = -\frac{\sqrt{7}+1}{3}$. Síðari lausnin kemur ekki til greina þar sem punktarnir á ferlinum hafa x-hnit ≥ 0. Punktarnir á ferlinum y^2-x^3 sem hafa x-hnit $\frac{\sqrt{7}-1}{3}$ eru (sjá dæmi 4.5.1)

$$\left(\frac{\sqrt{7}-1}{3}, \left(\frac{\sqrt{7}-1}{3}\right)^{3/2}\right) \approx (0{,}55, 0{,}40)$$

og

$$\left(\frac{\sqrt{7}-1}{3}, -\left(\frac{\sqrt{7}-1}{3}\right)^{3/2}\right) \approx (0{,}55, -0{,}40),$$

Þar sem þessir punktar eru greinilega nær punktinum $(1,0)$ en punkturinn $(0,0)$, eru þetta punktarnir sem við leituðum að.

Verkefni 4.5

Finnið afleiðuna dy/dx fyrir ferlana í dæmum 1-6.

1 $16x^2+25y^2 = 400$

2 $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 8$

3 $\cos xy = y$

4 $(x^2+y^2) = 4xy$

5 $x\cos y + y\cos x = 1$

6 $\sqrt{x+y}+\sqrt{xy} = 6$

Í dæmum 7-11 skal reikna afleiðuna dy/dx með fólginni diffrun og nota svo niðurstöðuna til að skrifa jöfnu snertillínu ferilsins í punktinum sem tilgreindur er.

7 $\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} = 2; \quad (1, 1)$

8 $\sin xy = y; \quad (\pi/2, 1)$

9 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4; \quad (-3\sqrt{3}, 1)$

10 $(x^2 + y^2)^3 = 8x^2y^2; \quad (1, -1)$

11 $\dfrac{x}{x^2 + y^2} = -\dfrac{1}{5}; \quad (-1, 2)$

12 Notið fólgna diffrun til þess að sýna að snertillína sporbaugsins

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

í punktinum (x_0, y_0) sé gefinn með jöfnunni

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

13 Finnið jöfnu snertillínu gleiðbogans

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

í punktinum (x_0, y_0).

14 Jafnan

$$x^2 - xy + y^2 = 9$$

lýsir sporbaug. Finnið jöfnur snertilínanna í punktunum þar sem sporbaugurinn sker x-ásinn og sýnið að þær séu samsíða.

15 Jafnan

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

lýsir ferli sem kallast *hnappelda* (lemniscate). Finnið þá punkta á hnappeldunni þar sem snertilínan er lárétt eða lóðrétt.

16 Sýnið að ferlarnir $x^2 + 2y^2 = c$ og $y = kx^2$ séu hornréttir í sérhverjum skurðpunkti fyrir öll k og öll $c > 0$.[Minnist þess að ferlar eru sagðir *hornréttir* í ákveðnum skurðpunkti ef snertilínur þeirra í þeim punkti eru hornréttar.]

17 Sýnið að ferlarnir $y^2 - x^2 = c$ og $xy = k$ séu hornréttir í sérhverjum skurðpunkti fyrir öll c og k ($c \neq 0$, $k \neq 0$).

4.6 Stofnföll

Skilgreining 4.6.1. Látum S vera sammengi sundurlægra opinna bila í $\mathbb{R}$ og $f : S \to \mathbb{R}$ vera fall. Við segjum að fall $F : S \to \mathbb{R}$ sé *stofnfall fallsins* f ef F er diffranlegt í S og $F'(x) = f(x)$ fyrir öll x úr S.

Dæmi 4.6.2. Fallið $\mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \sin x^2$ er stofnfall fallsins $\mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto 2x \cos x^2$.

Setning 4.6.3. *Látum f vera fall á opnu bili. Ef F er stofnfall fallsins f þá eru öll önnur stofnföll fallsins f af gerðinni $x \mapsto F(x) + c$ með c fasta.*

Sönnun. Ef G er stofnfall fallsins f þá gildir $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ fyrir öll x úr bilinu og þar með er $G - F$ fasti samkvæmt setningu 4.3.6. $\square$

Athugasemd. Oft er sagt að $F(x) + c$ sé *almennt stofnfall fallsins* $f(x)$.

Dæmi 4.6.4. Fallið

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2}$$

er skilgreint á menginu $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Fallið

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

er stofnfall fallsins f. Almennt stofnfall fallsins f er því

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + c_1 & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + c_2 & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + c_3 & 1 < x < +\infty \end{cases}$$

Ef við viljum finna stofnfall fallsins f sem tekur gildið 1 í punktunum -1, $1/2$ og 2 þá tökum við $c_1 = c_3 = 3/2$ og $c_2 = -3$. Hins vegar er oftast ritað $G(x) = F(x) + c$ og átt við að fastinn megi breytast eftir bilum.

Setning 4.6.5. *Látum u vera diffranlegt fall á opnu bili I og g vera diffranlegt fall á opnu bili sem inniheldur $u(I)$. Þá er*

$$F(x) = g(u(x)) + c$$

almennt stofnfall fallsins

$$f(x) = g'(u(x))\frac{du}{dx} \qquad \text{á bilinu } I.$$

Sönnun. Keðjuregla. □

Dæmi 4.6.6. Notum setningu 4.6.5 til að finna stofnfall fallsins $f(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x$. Setjum $u = \sin x$ þá er $\frac{du}{dx} = \cos x$ og $f(x) = 3u^2 \cdot \frac{du}{dx}$. Nú er u^3 stofnfall fallsins $3u^2$ svo samkvæmt setningunni er $F(x) = \sin^3 x + c$ almennt stofnfall fallsins $f(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x$.

Verkefni 4.6

Í dæmum 1-7 skal finna almennt stofnfall fyrir viðkomandi fall.

1 $f(x) = 8x^3 - 2x^2 + 4$

2 $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

3 $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$

4 $h(x) = x^{5/2} - \dfrac{5}{x^4} - \sqrt{x}$

5 $f(x) = 6\cos 3x - 3\sin 6x$

6 $f(x) = \sin^5 x \cdot \cos x$

7 $f(x) = \cos^4(3x)\sin(3x)$

Í dæmum 8-12 skal finna fall f sem uppfyllir skilyrðin sem tilgreind eru.

8 $f'(x) = \sin x - 2\sqrt{x}, \quad f(0) = 0$

9 $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 13}}, \quad f(17) = 2$

10 $f'(x) = 3\cos 2x, \quad f(\frac{\pi}{4}) = -1$

11 $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x^2 + 4}}, \quad f(2) = 3$

12 $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}, \quad f(1) = -1, \quad f(-1) = 1$

Kafli 5

Heildun

5.1 Flatarmál

Flatarmál marghyrninga og svæða í planinu sem eru sammengi endanlega margra marghyrninga er fundið með því að skipta svæðinu í einfaldari flatarmyndir eins og þríhyrninga. Við ætlum hér að kanna flatarmál flóknari svæða.

Við segjum að svæði D í planinu sé *takmarkað* ef finna má ferning sem inniheldur D. Látum D vera takmarkað svæði í planinu og látum R_1 og R_2 vera sammengi marghyrninga þannig að

$$R_1 \subseteq D \subseteq R_2.$$

Lítum á mismuninn

$$\mathrm{a}(R_2) - \mathrm{a}(R_1)$$

(sem er jákvæður vegna þess að $R_1 \subseteq R_2$). Ef hægt er að velja R_1 og R_2 þannig að þessi mismunur verði eins lítill og vera skal, þ.e.a.s. ef fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er hægt að velja R_1 og R_2 með $R_1 \subseteq D \subseteq R_2$ þannig að

$$\mathrm{a}(R_2) - \mathrm{a}(R_1) < \varepsilon,$$

þá segjum við að D sé *mælanlegt*. Ef ekki er til neinn marghyrningur innan í D þá segjum við að D sé *mælanlegt* ef velja má marghyrning R með $D \subseteq R$ þannig að $\mathrm{a}(R)$ sé eins lítið og vera skal, þ.e. ef hægt er fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ að finna marghyrning R þannig að $D \subseteq R$ og $\mathrm{a}(R) < \varepsilon$.

Hvert er þá flatarmál svæðisins D? Ef $R_1 \subseteq D \subseteq R_2$, þá gildir sérstaklega að $R_1 \subseteq R_2$ og þar með er $\mathrm{a}(R_1) \leq \mathrm{a}(R_2)$. Þetta gildir um hvaða marghyrning

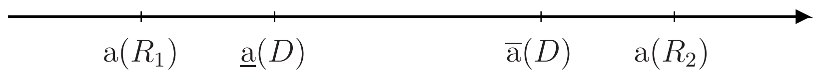
$R \subseteq D$ sem er svo að

$$\sup_{R \subseteq D} \mathrm{a}(R) \leq \inf_{R \supseteq D} \mathrm{a}(R).$$

Ef D er takmarkað svæði í planinu þá setjum við

$$\underline{\mathrm{a}}(D) = \sup_{R \subseteq D} \mathrm{a}(R) \quad \text{og} \quad \overline{\mathrm{a}}(D) = \inf_{R \supseteq D} \mathrm{a}(R).$$

Ef ekki er til neinn marghyrningur $R \subseteq D$ þá setjum við $\underline{\mathrm{a}}(D) = 0$.



Mynd 5.1:

Á mynd 5.1 er afstaða þessara talna sýnd og næsta setning sýnir hvernig þær tengjast mælanleika svæðisins D.

Setning 5.1.1. *Takmarkað svæði D er mælanlegt þá og því aðeins að $\underline{\mathrm{a}}(D) = \overline{\mathrm{a}}(D)$.*

Sönnun. Við vitum að $\underline{\mathrm{a}}(D) \leq \overline{\mathrm{a}}(D)$. Ef R_1 og R_2 eru marghyrningar og $R_1 \subseteq D \subseteq R_2$ þá er $\mathrm{a}(R_1) \leq \underline{\mathrm{a}}(D) \leq \overline{\mathrm{a}}(D) \leq \mathrm{a}(R_2)$.

Ef D er mælanlegt þá má annað hvort velja R_1 og R_2 þannig að mismunurinn $\mathrm{a}(R_2) - \mathrm{a}(R_1)$ verði eins lítill og vera skal, eða velja má marghyrning $R \supset D$ þannig að $\mathrm{a}(R)$ verði eins lítil tala og vera skal. Í báðum tilfellum fæst því að $\underline{\mathrm{a}}(D) = \overline{\mathrm{a}}(D)$.

Ef $\underline{\mathrm{a}}(D) = \overline{\mathrm{a}}(D)$ og D inniheldur marghyrning, þá þurfum við að sýna að velja megi marghyrninga $R_1 \subseteq D$ og $R_2 \supseteq D$ þannig að mismunurinn $\mathrm{a}(R_2) - \mathrm{a}(R_1)$ verði eins lítill og vera skal. Látum $\varepsilon > 0$ vera gefið. Samkvæmt skilgreiningu á $\underline{\mathrm{a}}(D)$ og $\overline{\mathrm{a}}(D)$ þá má velja $R_1 \subseteq D$ og $R_2 \supseteq D$ þannig að

$$0 \leq \underline{\mathrm{a}}(D) - \mathrm{a}(R_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

og

$$0 \leq \mathrm{a}(R_2) - \overline{\mathrm{a}}(D) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En þá er $\mathrm{a}(R_2) - \mathrm{a}(R_1) < \varepsilon$, og því er svæðið D mælanlegt.

Ef D inniheldur engan marghyrning og $\underline{\mathrm{a}}(D) = \overline{\mathrm{a}}(D)$, þá er

$$\inf_{R \supset D} \mathrm{a}(R) = \overline{\mathrm{a}}(D) = 0$$

og því fæst að fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til marghyrningur $R \supset D$ þannig að $\mathrm{a}(R) < \varepsilon$. Því er svæðið D einnig mælanlegt í þessu tilfelli. $\square$

Skilgreining 5.1.2. Ef svæðið D er mælanlegt þá setjum við

$$\mathrm{a}(D) = \underline{\mathrm{a}}(D) = \overline{\mathrm{a}}(D).$$

og köllum töluna $\mathrm{a}(D)$ *flatarmál* D.

Athugasemd. Við getum reiknað út flatarmál svæðis D með því að nálga það með flatarmáli marghyrnings $R \supseteq D$.

Hafa öll takmörkuð mengi flatarmál? Lítum á eftirfarandi dæmi:

Dæmi 5.1.3. Setjum

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1 \text{ og } x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Það er ljóst að D inniheldur enga marghyrninga svo að $\underline{\mathrm{a}}(D) = 0$. Einnig er ljóst, að ef R er marghyrningur og $R \supseteq D$ þá gildir að $R \supseteq F$ þar sem

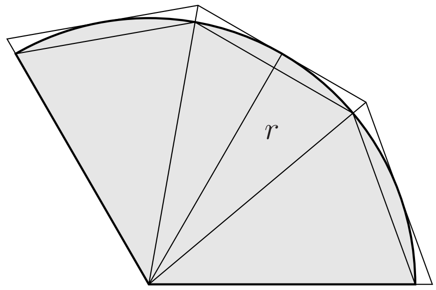
$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$$

og þar með er $\mathrm{a}(R) \geq 1$. En þá er $\overline{\mathrm{a}}(D) \geq 1$, svo $\overline{\mathrm{a}}(D) \neq \underline{\mathrm{a}}(D)$ og þar með er D ekki mælanlegt.

Dæmi 5.1.4. Hringgeiri er mælanlegt svæði og flatarmál hans er $\frac{1}{2}rs$ þar sem r er radíus geirans og s er lengd hringbogans (sjá mynd (5.2)).

Úrlausn. Köllum geirann D. Látum n vera náttúrulega tölu og skiptum horninu í n jafnstór horn. Við drögum síðan n jafnstóra þríhyrninga innan geirans og n jafnstóra þríhyrninga sem ná út fyrir geirann eins og sýnt er á myndinni. Látum d_i tákna lengd grunnlínu innri þríhyrninganna og d_y tákna lengd grunnlínu þeirra ytri. Hæðin í ytri þríhyrningunum er r en hæðina í þeim innri köllum við h.

Grunnlínur innri þríhyrninganna mynda brotna línu af lengd nd_i. Hægt er að sýna fram á að nd_i stefni á s, lengd hringbogans, þegar $n \to \infty$. Sú sönnun er þó utan marka þessarar bókar. Við göngum út frá þessu sem gefnum hlut.



Mynd 5.2: Hringgeiri

Þar sem

$$h^2 + \left(\frac{d_i}{2}\right)^2 = r^2 \qquad \text{(regla Pýþagorasar)}$$

þá sést að $h \to r$ þegar $n \to \infty$ því að $d_i \to 0$ þegar $n \to \infty$.

Innri þríhyrningarnir mynda marghyrning R_i og $\mathrm{a}(R_i) = \frac{1}{2}nhd_i$. Ytri þríhyrningarnir mynda annan marghyrning R_y og $\mathrm{a}(R_y) = \frac{1}{2}nrd_y$.

Þar eð

$$\frac{h}{d_i} = \frac{r}{d_y}$$

þá er $d_y = rd_i/h$ svo að $\mathrm{a}(R_y) = nr^2d_i/(2h)$ og þar með gildir að

$$\mathrm{a}(R_y) - \mathrm{a}(R_i) = n \cdot d_i \frac{r^2 - h^2}{2h} \to s \cdot 0 = 0 \qquad \text{þegar} n \to 0.$$

Þar sem R_i og R_y eru marghyrningar og $R_i \subseteq D \subseteq R_y$ þá er geirinn D mælanlegur og

$$\mathrm{a}(D) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{a}(R_i) = \lim_{n\to\infty} nd_ih/2 = \frac{sr}{2}.$$

Eins og komið hefur fram þá eru til svæði í planinu sem eru ekki mælanleg. Við setjum hér fram án sönnunar nokkrar fullyrðingar um safn mælanlegra svæða og flatarmál þeirra.

(i) Ef A er mælanlegt þá er $\mathrm{a}(A) \geq 0$.

(ii) Ef A og B eru í mælanleg þá eru $A \cup B$ og $A \cap B$ mælanleg og

$$\mathrm{a}(A \cup B) = \mathrm{a}(A) + \mathrm{a}(B) - \mathrm{a}(A \cap B).$$

(iii) Ef A og B eru mælanleg og $A \subseteq B$ þá er $B \setminus A$ mælanlegt og

$$\mathrm{a}(B \setminus A) = \mathrm{a}(B) - \mathrm{a}(A).$$

(iv) Ef A er mælanlegt og ef B er eins og A þá er B mælanlegt og $\mathrm{a}(B) = \mathrm{a}(A)$.

(v) Ef D er svæði með eftirfarandi eiginleika: Fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ eru til mælanleg svæði A og B þannig að $A \subseteq D \subseteq B$ og $\mathrm{a}(A) - \mathrm{a}(B) < \varepsilon$, þá er D mælanlegt.

Við ætlum næst að kanna mælanleika svæðis sem liggur milli ferils jákvæðs falls og x-áss.
Látum f vera fall skilgreint á bili $[a, b]$ þannig að

$$0 \leq f(x) \leq M \qquad \text{fyrir öll } x \in [a, b]$$

Setjum
$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ og } 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Við skoðum nú marghyrninga innan í og utan um D af ákveðinni gerð. Látum

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

þar sem
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

vera *skiptingu á bilinu* $[a, b]$. Fyrir sérhvert i veljum við tölur m_i og M_i þannig að
$$m_i \leq f(x) \leq M_i \qquad \text{fyrir öll } x \in [x_{i-1}, x_i].$$

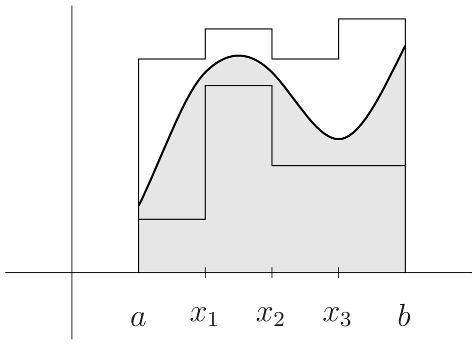
Við látum R_1 vera sammengi rétthyrninganna með grunna $[x_{i-1}, x_i]$ og hæðir m_i og R_2 sammengi rétthyrninga með sömu grunna en hæðir M_i. Þá er

$$R_1 \subseteq D \subseteq R_2$$

og

$$\begin{aligned}
\mathrm{a}(R_2) - \mathrm{a}(R_1) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})
\end{aligned}$$

Ef hægt er að gera þennan mismun eins lítinn og vera skal þá er D mælanlegt. Við sjáum því að ef við fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ getum valið skiptinguna P og M_i og m_i þannig að
$$M_i - m_i \leq \varepsilon \qquad \text{fyrir sérhvert } i$$



Mynd 5.3: Yfir- og undirsumma falls

þá er

$$0 \leq \mathrm{a}(R_2) - \mathrm{a}(R_1) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a)$$

og D er þar með mælanlegt. Við getum þá notað aðra hvora summuna

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{eða} \quad \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

til að nálga $\mathrm{a}(D)$, en við munum hér á eftir finna aðferð sem nota má í mörgum tilfellum og sem gefur nákvæmt gildi á $\mathrm{a}(D)$.

Verkefni 5.1

Sýnið að mengin í dæmum 1-3 séu mælanleg og hafi flatarmálið 0.

1 Mengi sem samanstendur af einum punkti.

2 Mengi endanlega margra punkta í plani.

3 Mengi endanlega margra línustrika í plani.

4 Látum A vera mengið $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ og M vera mengi allra hlutmengja í A. Fyrir sérhvert $S \in M$, látum við $n(S)$ tákna fjölda staka í S. Sýnið að mengjafallið n uppfyllir fullyrðingar (i),(ii) og (iii) um mælanleg mengi og flatarmál þeirra í grein 5.1 í kennslubókinni.

5.2 Heildi

Athuganirnar hér að framan leiða nú til eftirfarandi skilgreininga. Látum f vera takmarkað fall á bili $[a, b]$, og látum $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ þar sem

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

vera skiptingu á $[a, b]$. Fyrir sérhvert i látum við m_i og M_i vera tölur þannig að

$$m_i \leq f(x) \leq M_i \qquad \text{fyrir öll } x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Talan

$$U = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

kallast *undirsumma* fyrir fallið f á bilinu $[a, b]$ svarandi til skiptingarinnar P og talan

$$Y = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

kallast *yfirsumma* fyrir fallið f á bilinu $[a, b]$ svarandi til skiptingarinnar P. Ljóst er að $U \leq Y$.

Skilgreining 5.2.1. Takmarkað fall er sagt *heildanlegt* á $[a, b]$ ef velja má skiptingu P og undirsummu U og yfirsummu Y svarandi til P þannig að mismunurinn $Y - U$ verði eins lítill og vera skal, þ.e.a.s. ef fyrir hvaða $\varepsilon > 0$ sem er má velja skiptingu P, undirsummu U og yfirsummu Y, þannig að $Y - U < \varepsilon$.

Við tökum eftir að þessari skilgreiningu svipar til skilgreiningarinnar á mælanleika. Þar er líka samband á milli eins og koma mun í ljós. Næsta niðurstaða á sér hliðstæðu í kaflanum um mælanleg mengi.

Setning 5.2.2. *Látum f vera takmarkað fall á $[a, b]$. Þá er sérhver undirsumma fyrir f minni en eða jöfn hvaða yfirsummu sem er. Þ.e.a.s., ef P' og P'' eru tvær skiptingar á $[a, b]$ og ef U' er undirsumma svarandi til P' og Y'' er yfirsumma svarandi til P'' þá er*

$$U' \leq Y''.$$

Sönnun. Látum $P' = \{x_1', \dots, x_n'\}$ og $P'' = \{x_1'', \dots, x_m''\}$ vera skiptingar og

$$U' = \sum_{i=1}^{n} m_i'(x_i' - x_{i-1}') \quad \text{og} \quad Y'' = \sum_{j=1}^{m} M_j''(x_j'' - x_{j-1}'')$$

vera undir- og yfirsummur sem svara til þeirra. Gerum fyrst ráð fyrir að $m_i \geq 0$ fyrir öll i. Þá er $f(x) \geq 0$ fyrir sérhvert x á bilinu $[a, b]$ og því er $M_j \geq 0$ fyrir öll j. Ef við látum

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ og } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

þá sjáum við eins og í umræðunni um flatarmál hér að framan að U' er flatarmál marghyrnings R' innan í D og Y'' er flatarmál marghyrnings R'' utan um D. Þar sem $R' \subseteq R''$ þá er $U' \leq Y''$.

Almennt, þá veljum við tölu α þannig að $m_i' + \alpha \geq 0$ fyrir öll i, og skoðum fallið $g = f + \alpha$. Þar sem

$$m_i' + \alpha \leq f(x) + \alpha \qquad \text{fyrir öll } x \in [x_{i-1}', x_i']$$

og

$$f(x) + \alpha \leq M_j'' + \alpha \qquad \text{fyrir öll } x \in [x_{j-1}'', x_j'']$$

þá getum við notað röksemdafærsluna að ofan með g í stað f og $m_i' + \alpha$ og $M_j'' + \alpha$ í stað m_i' og M_j'' og við ályktum að

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i' + \alpha)(x_i' - x_{i-1}') \leq \sum_{j=1}^{n} (M_j'' + \alpha)(x_j'' - x_{j-1}'').$$

Þar sem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (m_i' + \alpha)(x_i' - x_{i-1}') &= \sum_{i=1}^{n} m_i'(x_i' - x_{i-1}') + \sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i' - x_{i-1}') \\ &= U' + \alpha(b - a) \end{aligned}$$

og þar sem

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} (M_j'' + \alpha)(x_j'' - x_{j-1}'') &= \sum_{j=1}^{n} M_j''(x_j'' - x_{j-1}'') \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \alpha(x_j'' - x_{j-1}'') \\ &= Y'' + \alpha(b - a) \end{aligned}$$

sést að $U' \leq Y''$. $\square$

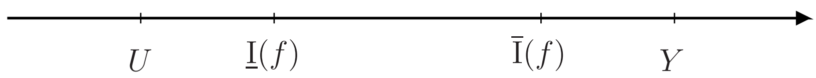
Ef Y er einhver yfirsumma fyrir f þá er $U \leq Y$ fyrir hvaða undirsummu U sem er. Mengi undirsumma fyrir f er því takmarkað að ofan og um efri mörk þess gildir að

$$\sup U \leq Y.$$

Þetta gildir um hvaða yfirsummu Y fyrir f sem er svo að mengi yfirsumma er takmarkað að neðan og

$$\sup U \leq \inf Y.$$

Töluna $\sup U$ köllum við *neðra heildið* fyrir f á $[a, b]$ og táknum hana með $\underline{I}(f)$. Töluna $\inf Y$ köllum við *efra heildi* f og táknum það með $\overline{I}(f)$. Afstaða þessara tákna sést á mynd (5.4).



Mynd 5.4:

Hliðstætt við setningu 5.1.1 fáum við nú

Setning 5.2.3. *Takmarkað fall f á $[a, b]$ er* heildanlegt *ef og aðeins ef $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$.*

Sönnun. Sönnunin er áþekk sönnuninni á setningu 5.1.1. Ef f er heildanlegt á $[a, b]$ þá má velja undirsummu U og yfirsummu Y (meira að segja svarandi til sömu skiptingar) þannig að $Y - U$ verði eins lítil tala og vera skal. Þar sem

$$U \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq Y$$

sést að $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$.

Ef hins vegar $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ og ef $\varepsilon > 0$ er einhver tala, þá veljum við undirsummu U' og yfirsummu Y'', sem svara til skiptinga P' og P'' þannig að

$$\underline{I}(f) - U' < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{og} \quad Y'' - \overline{I}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

og þar með er $Y'' - U' < \varepsilon$. En við erum ekki búin. Við þurfum að finna undirsummu U og yfirsummu Y svarandi til *sömu skiptingar* P þannig að $Y - U < \varepsilon$. Við gerum það á eftirfarandi hátt: Látum $P = P' \cup P''$, þ.e.a.s.

P er skiptingin sem samanstendur af öllum skiptipunktum í P' eða P''. Nú búum við til undirsummu U fyrir P þannig að $U = U'$. Ef

$$U' = \sum_{i=1}^{n} m_i{}'(x_i{}' - x_{i-1}{}')$$

og ef $[x_{k-1}, x_k]$ er skiptibil fyrir P þá er til i þannig að $[x_{k-1}, x_k] \subseteq [x_{i-1}{}', x_i{}']$. Við setjum $m_k = m_i{}'$ og látum l vera fjölda skiptibila í P. Þannig fæst að

$$U = \sum_{i=1}^{l} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i{}'(x_i{}' - x_{i-1}{}') = U'$$

Á svipaðan hátt búum við til yfirsummu Y svarandi til P þannig að $Y = Y''$. Þá er $Y - U < \varepsilon$. $\square$

Skilgreining 5.2.4. Ef f er heildanlegt á $[a, b]$ þá er talan $\underline{\mathrm{I}}(f) = \overline{\mathrm{I}}(f)$ kölluð *heildið* af f á bilinu $[a, b]$ og þessi tala er ýmist táknuð með

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^b f\,dx \qquad \text{eða bara} \qquad \int_a^b f.$$

Dæmi 5.2.5. Einföld föll eins og fastaföll eru heildanleg og heildi þeirra eru auðreiknanleg. Því látum $f(x) = \alpha$ fyrir öll x á $[a, b]$, og setjum $m = M = \alpha$. Þá er $m(b - a)$ undirsumma fyrir f og $M(b - a)$ er yfirsumma fyrir f svo að

$$\alpha(b - a) = m(b - a) \leq \underline{\mathrm{I}}(f) \leq \overline{\mathrm{I}}(f) \leq M(b - a) = \alpha(b - a)$$

og þar með er f heildanlegt og

$$\int_a^b f(x)\,dx = \alpha(b - a).$$

Heildið af f á bilinu $[a, b]$ má finna með því að nálga það með undir- eða yfirsummum. Heildið má líka nálga með svokölluðum *Riemann-summum.* Ef P er skipting á $[a, b]$ og ef $x_i{}' \in [x_{i-1}, x_i]$ þá er summan

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i{}')(x_i - x_{i-1})$$

kölluð *Riemann-summa* eða *meðalsumma* fyrir f svarandi til skiptingarinnar P á $[a, b]$. Ef U og Y eru undir- og yfirsumma fyrir f einnig svarandi til P þá er ljóst að

$$U \leq S \leq Y.$$

Með kerfisbundnu vali á punktunum x_i' eru búnar til aðferðir til að nálga heildið á f á $[a, b]$. En við munum líka sjá að hægt er í mörgum tilfellum að reikna það nákvæmlega út með mjög einföldum aðferðum. Við munum komast að raun um að heildið er til margra hluta nytsamlegt. Við byrjum á því að athuga samband heildis og flatarmáls.

Setning 5.2.6. *Ef f er heildanlegt á $[a, b]$ og $f \geq 0$ þá er mengið*

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ og } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

mælanlegt og

$$\mathrm{a}(D) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Sönnun. Látum $\varepsilon > 0$ og veljum skiptingu á $[a, b]$ og undir- og yfirsummur

$$U = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{og} \quad Y = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

þannig að $0 \leq Y - U \leq \varepsilon$. Við megum gera ráð fyrir því að $m_i \geq 0$ fyrir sérhvert i, því ef einhver m_i eru minni en 0 þá setjum við 0 í stað þeirra. Þar sem $f \geq 0$ fæst þá ný undirsumma sem er ennþá nær Y en sú fyrri. En eins og kom fram í upphafi kaflans þá má í því tilviki líta á U sem flatarmál marghyrnings R_1 innan í D og á Y sem flatarmál marghyrnings R_2 utan um D (sbr. mynd (5.3)). Þá er

$$\mathrm{a}(R_2) - \mathrm{a}(R_1) = Y - U \leq \varepsilon.$$

Þar sem finna má slíka marghyrninga fyrir hvaða $\varepsilon > 0$ sem er þá er D mælanlegt. Ennfremur gildir

$$\mathrm{a}(R_1) \leq \mathrm{a}(D) \leq \mathrm{a}(R_2) \quad \text{og} \quad U \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq Y$$

svo að

$$\left| \mathrm{a}(D) - \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \varepsilon.$$

En $\varepsilon > 0$ getur verið hvaða tala sem er svo að

$$\mathrm{a}(D) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$\square$

Heildið má líka nota til að reikna út rúmmál, til að skilgreina föll (til dæmis $\ln x$), til að skilgreina hluti í eðlisfræði og fleira. Við munum kynnast þessu í seinni köflum. Næst kemur almenn niðurstaða um heildanleg föll.

Setning 5.2.7. *Látum f og g vera takmörkuð föll á bili $[a,b]$. Þá gildir*

(i) *Ef f er heildanlegt á $[a,b]$ og $f \geq 0$ þá er $\int_a^b f\,dx \geq 0$.*

(ii) *Ef f er heildanlegt á $[a,b]$ og c er tala þá er fallið cf heildanlegt á $[a,b]$ og*

$$\int_a^b (cf)\,dx = c\int_a^b f\,dx.$$

(iii) *Ef f og g eru heildanleg á $[a,b]$ þá er $f+g$ heildanlegt á $[a,b]$ og*

$$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx.$$

Ennfremur er margfeldið $f \cdot g$ heildanlegt á $[a,b]$.

(iv) *Ef f er heildanlegt á $[a,b]$ og ef $a < c < b$ þá er f heildanlegt á $[a,c]$ og á $[c,b]$.*

(v) *Ef $a < c < b$, og f er heildanlegt á $[a,c]$ og á $[c,b]$ þá er f heildanlegt á $[a,b]$ og*

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx.$$

Sönnun. Fullyrðinguna í lið (i) sönnuðum við í setningu 5.2.6.

Sönnun á lið (ii). Við byrjum á tilfellinu $c = -1$. Látum $\varepsilon > 0$ og veljum skiptingu og undir- og yfirsummur U og Y fyrir f sem svara til hennar og eru þannig að $Y - U < \varepsilon$. Segjum að

$$U = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{og} \quad Y = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

þar sem

$$m_i \leq f(x) \leq M_i \qquad \text{ef } x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Þá er

$$-M_i \le -f(x) \le -m_i \qquad \text{ef } x \in [x_{i-1}, x_i]$$

svo að

$$U_1 = \sum_{i=1}^{n} -M_i(x_i - x_{i-1}) = -Y \quad \text{ og } \quad Y_1 = \sum_{i=1}^{n} -m_i(x_i - x_{i-1}) = -U.$$

eru undirsumma annars vegar og yfirsumma hins vegar fyrir $-f$. Ennfremur þá er

$$Y_1 - U_1 = -U + Y < \varepsilon.$$

Þetta sýnir að $-f$ er heildanlegt á $[a, b]$.

Nú er

$$-Y = U_1 \le \int_a^b -f\,dx \le Y_1 = -U$$

og

$$U \le \int_a^b f\,dx \le Y \quad \text{ svo að } \quad -Y \le -\int_a^b f\,dx \le -U.$$

Þar sem

$$0 \le Y - U \le \varepsilon \quad \text{ þá er } \quad \left| -\int_a^b f\,dx - \int_a^b -f\,dx \right| < \varepsilon.$$

En ε getur verið hvaða jákvæða tala sem vera skal svo að

$$\int_a^b -f\,dx = -\int_a^b f\,dx.$$

Lát nú $c > 0$ og U og Y vera eins og í upphafi. Þá er

$$cm_i \le cf(x) \le cM_i \qquad \text{ef } x \in [x_{i-1}, x_i].$$

svo að

$$U_1 = \sum_{i=1}^{n} cm_i(x_i - x_{i-1}) = cU \quad \text{ og } \quad Y_1 = \sum_{i=1}^{n} cM_i(x_i - x_{i-1}) = cY$$

eru undirsumma annars vegar og yfirsumma hins vegar fyrir cf. Nú er

$$cU = U_1 \le \int_a^b cf\,dx \le Y_1 = cY \quad \text{ og } \quad U \le \int_a^b f\,dx \le Y.$$

Þar sem $Y_1 - U_1 = cY - cU = c(Y - U) < c\varepsilon$, þá er

$$\Big| \int_a^b cf\,dx - c\int_a^b f\,dx \Big| < c\varepsilon.$$

Nú getur ε verið hvaða jákvæða tala sem vera skal svo að

$$\int_a^b cf\,dx = c\int_a^b f\,dx.$$

Sönnun á lið (iii): Látum $\varepsilon > 0$ og veljum skiptingar P' og P'' og undir- og yfirsummur U', U'' og Y', Y'' fyrir f annars vegar og g hins vegar þannig að

$$Y' - U' < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{og} \quad Y'' - U'' < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Látum síðan P vera skiptinguna $P' \cup P''$. Eins og fram kom í sönnun á setningu 5.2.3 þá má finna undirsummur U_1 og U_2 fyrir f og g svarandi til P þannig að $U_1 = U'$ og $U_2 = U''$. Einnig má finna yfirsummur Y_1 og Y_2 fyrir f og g þannig að $Y_1 = Y'$ og $Y_2 = Y''$. Segjum að

$$U_1 = \sum_{i=1}^n s_i(x_i - x_{i-1}), \qquad U_2 = \sum_{i=1}^n t_i(x_i - x_{i-1}),$$
$$Y_1 = \sum_{i=1}^n S_i(x_i - x_{i-1}), \qquad Y_2 = \sum_{i=1}^n T_i(x_i - x_{i-1}).$$

Setjum

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 = \sum_{i=1}^n (s_i + t_i)(x_i - x_{i-1}) \\ Y &= Y_1 + Y_2 = \sum_{i=1}^n (S_i + T_i)(x_i - x_{i-1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Þá er U undirsumma fyrir $f + g$, Y er yfirsumma fyrir $f + g$ og

$$\begin{aligned} Y - U &= Y_1 + Y_2 - (U_1 + U_2) \\ &= Y'' - U'' + Y' - U' \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{2}$$

svo að $f+g$ er heildanlegt. Ennfremur gildir að

$$U_1 + U_2 \le \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx \le Y_1 + Y_2$$

og að

$$U \le \int_a^b (f+g)\,dx \le Y.$$

Af (1) og (2) má álykta að

$$\left| \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx - \int_a^b (f+g)\,dx \right| < \varepsilon.$$

En ε getur verið hvaða jákvæð tala sem er svo að

$$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx.$$

Lítum þá á margfeldið $f \cdot g$. Athugum fyrst tilfellið þar sem $0 \le f \le S$ og $0 \le g \le T$. Látum $\varepsilon > 0$ og U_1, U_2, Y_1 og Y_2 vera eins og að ofan með $0 \le s_i \le S_i \le S$ og $0 \le t_i \le T_i \le T$. Setjum

$$U = \sum_{i=1}^n s_i t_i (x_i - x_{i-1}) \quad \text{og} \quad Y = \sum_{i=1}^n S_i T_i (x_i - x_{i-1}).$$

Þá fæst að

$$\begin{aligned}
Y - U &= \sum_{i=1}^n (S_i T_i - s_i t_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n (S_i T_i - s_i T_i + s_i T_i - s_i t_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n T_i (S_i - s_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n s_i (T_i - t_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&\le T \sum_{i=1}^n (S_i - s_i)(x_i - x_{i-1}) + S \sum_{i=1}^n (T_i - t_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&< T \cdot \frac{\varepsilon}{2} + S \cdot \frac{\varepsilon}{2} = (T+S) \cdot \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Talan $(T+S)\cdot\frac{\varepsilon}{2}$ getur verið eins lítil og vera skal og því ályktum við að $f\cdot g$ sé heildanlegt.

Almennt þá veljum við tölu α þannig að $f+\alpha\geq 0$ og $g+\alpha\geq 0$. Þá fæst að $(f+\alpha)(g+\alpha)$ er heildanlegt svo að $f\cdot g=(f+\alpha)(g+\alpha)-\alpha f-\alpha g-\alpha^2$ er heildanlegt (föllin αf og αg eru heildanleg samkvæmt lið (ii)).

Sönnun á lið (iv). Látum $\varepsilon>0$ og veljum skiptingu P og undir- og yfirsummur U og Y svarandi til P þannig að $Y-U<\varepsilon$. Segjum að

$$U=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})\quad \text{og}\quad Y=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}).$$

Sýnum að f sé heildanlegt á bilinu $[a,c]$. Ef c er einn af skiptipunktunum segjum $c=x_k$, þá er

$$P_1=\{x_0,x_1,\ldots,x_k\}$$

skipting á $[a,c]$,

$$U=\sum_{i=1}^{k} m_i(x_i-x_{i-1})\quad \text{og}\quad Y=\sum_{i=1}^{k} M_i(x_i-x_{i-1}).$$

eru undir- og yfirsumma fyrir f svarandi til P_1 og

$$Y_1-U_1=\sum_{i=1}^{k}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})\leq\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\varepsilon.$$

Ef c er ekki einn af skiptipunktunum þá er til k þannig að $x_{k-1}<c<x_k$. Þá er $P_1=\{x_0,x_1,\ldots,x_{k-1},c\}$ skipting á $[a,c]$ og

$$U_1=\sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i-x_{i-1})+m_k(c-x_{k-1})$$

og

$$Y_1=\sum_{i=1}^{k-1} M_i(x_i-x_{i-1})+M_k(c-x_{k-1})$$

eru undir- og yfirsumma fyrir f svarandi til P_1 og eins og að ofan er $Y_1-U_1<\varepsilon$.

Sönnun á lið (v). Æfing. $\square$

Fylgisetning 5.2.8. *Ef f og g eru heildanleg á $[a, b]$ og ef $f \leq g$ þá er*

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Ef $-M \leq f \leq M$ fæst sér í lagi að $|\int_a^b f(x)dx| \leq M(b-a)$.

Sönnun. Lítum á fallið $h = g - f = g + (-1)f$. Samkvæmt setningunni hér að framan þá er

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_a^b h(x)\, dx &= \int_a^b (g(x) + (-1)f(x)\, dx \\ &= \int_a^b g(x)\, dx + (-1)\int_a^b f(x)\, dx \\ &= \int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx. \end{aligned}$$

□

Í sumum tilvikum kemur sér vel að láta $\int_c^c f(x)\, dt$ hafa merkingu. Við setjum $\int_c^c f(x)\, dt = 0$. Einnig getur komið sér vel að láta $\int_a^b f(x)\, dt$ hafa merkingu þótt $a > b$. Við setjum

$$\int_a^b f(x\, dt = -\int_b^a f(x\, dt$$

ef $a > b$ og f er heildanlegt á $[b, a]$.

Hvaða föll eru heildanleg? Eru t.d. öll takmörkuð föll heildanleg? Við skulum fyrst gera grein fyrir því að svarið við seinni spurningunni er nei.

Dæmi 5.2.9. Setjum

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ef } x \in [0,1] \text{ og } x \text{ er óræð} \\ 0 & \text{ef } x \in [0,1] \text{ og } x \text{ er ræð.} \end{cases}$$

Þá er f takmarkað fall á $[0, 1]$. Ef $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ er einhver skipting á $[0, 1]$ og ef

$$m_i \leq f(x) \leq M_i \qquad \text{fyrir öll } x \in [x_{i-1}, x_i]$$

þá er $m_i \leq 0$ og $M_i \geq 1$, vegna þess að bilið $[x_{i-1}, x_i]$ inniheldur bæði ræða og óræða tölu. Af þessu leiðir, að ef U og Y eru undir- og yfirsumma fyrir f svarandi til P þá er $Y - U \geq 1$. Fallið f er því ekki heildanlegt á $[0, 1]$.

Víkjum þá að fyrri spurningunni. Við getum ekki á þessu stigi gefið einfalda lýsingu á heildanlegum föllum á tilteknu bili $[a, b]$. En í næstu tveimur setningum sjáum við að mörg þau föll sem við rekumst á eru heildanleg.

Setning 5.2.10. *Ef f er einhalla á $[a, b]$ þá er f heildanlegt á $[a, b]$*

Sönnun. Við skulum líta á tilfellið þar sem f er einhalla vaxandi. Látum $n > 1$ vera náttúrulega tölu og skiptum $[a, b]$ í n jafn löng bil; $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ þar sem $x_i - x_{i-1} = (b-a)/n$. Setjum $m_i = f(x_{i-1})$ og $M_i = f(x_i)$. Þar sem f er vaxandi þá er

$$m_i \leq f(x) \leq M_i \qquad \text{fyrir öll } x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Setjum

$$U = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

og

$$Y = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Þá er

$$Y - U = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) = \frac{b-a}{n} \left(f(b) - f(a)\right).$$

(sjá mynd (5.5). Talan $Y - U$ er summan af flatarmálum skyggðu rétthyrninganna). Með því að velja n nógu stórt sést að mismunurinn $Y - U$ verður eins lítil og vera skal svo að f er heildanlegt. $\square$

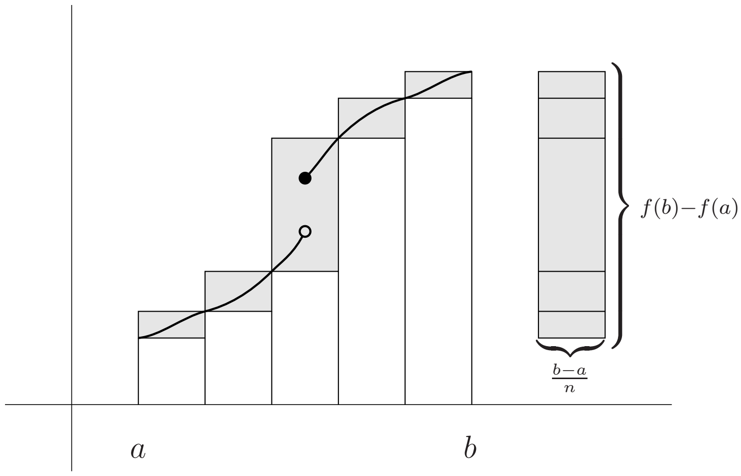
Með því að nota setningar 5.2.6 og 5.2.7 og þrepun fæst eftirfarandi niðurstaða.

Setning 5.2.11. *Ef f er fall á bili $[a, b]$, og ef til er skipting $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ á $[a, b]$ þannig að f er einhalla á hverju skiptibili $[x_{i-1}, x_i]$ þá er f heildanlegt á $[a, b]$.*

Sönnun. Æfing, nota setningar 5.2.7 og 5.2.10. $\square$

Við skulum næst sýna að samfelld föll séu heildanleg.

Setning 5.2.12. *Ef f er samfellt á bilinu $[a, b]$ þá er f heildanlegt á $[a, b]$.*



Mynd 5.5: Mismunur yfir- og undirsummu

Sönnun. Látum $\varepsilon > 0$ vera gefið og látum $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ vera skiptingu á $[a, b]$. Á hverju skiptibili $[x_{i-1}, x_i]$ þá tekur f minnsta gildi m_i og stærsta gildi M_i. Við köllum P *ε-skiptingu* fyrir f ef $M_i - m_i < \varepsilon$ fyrir öll i. Samkvæmt setningu 3.2.1 þá er til ε-skipting fyrir f á bilinu $[a, b]$. Setjum $\varepsilon_1 = \varepsilon/(b-a)$ og látum $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ vera ε_1-skiptingu á $[a, b]$. Þá fæst

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&< \varepsilon_1 \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \\
&= \varepsilon_1(b-a) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

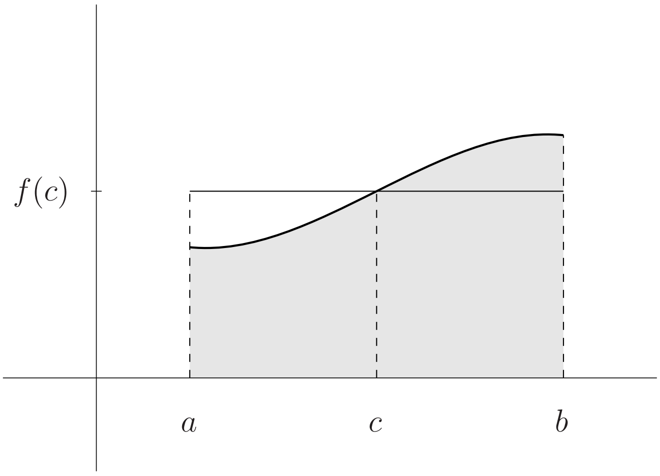
□

Við getum nú sett fram meðalgildissetningu fyrir heildi.

Setning 5.2.13. *Ef f er samfellt fall á bilinu $[a, b]$ þá er til $c \in [a, b]$ þannig að*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Á mynd (5.6) er $f \geq 0$. Setningin segir þá að velja megi c þannig að flatarmál rétthyrningsins verði það sama og flatarmálið milli ferils f og x-áss.



Mynd 5.6: Meðalgildissetning fyrir heildi

Sönnun. Látum m og M vera minnsta og stærsta gildi f á bilinu $[a, b]$. Þá varpar f bilinu $[a, b]$ á bilið $[m, M]$ og

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \text{fyrir öll } x \in [a, b].$$

Þar sem $m(b-a)$ er undirsumma og $M(b-a)$ er yfirsumma fyrir f þá er

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a),$$

svo að

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Nú tekur f öll gildi milli m og M svo að til er c á bilinu $[a, b]$ þannig að

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

$\square$

Það er ekki hægt, á þessu stigi að gefa tæmandi lista yfir heildanleg föll. Hins vegar getum við bætt við föllum á listann.

Setning 5.2.14. *Ef f er takmarkað á lokaða bilinu $[a, b]$ og samfellt á opna bilinu þá er f heildanlegt á $[a, b]$ og heildi f á bilinu $[a, b]$ óháð gildum f í endapunktum a og b.*

Sönnun. Veljum M þ.a. $|f(x)| \leq M$ fyrir öll x úr $[a, b]$ og látum δ vera tölu, $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$.

Veljum nú undir- og yfirsummu U_1, Y_1 fyrir f á bilinu $[a, a + \delta]$ þ.a. $Y_1 - U_1 = 2M\delta$ og eins fyrir bilið $[b - \delta, b]$. Þar sem f er samfellt á $[a + \delta, b - \delta]$ þá er til skipting á því bili og undir- og yfirsummur U' og Y, þ.a. $Y' - U' < \delta$. Úr þessum undir- og yfirsummum má búa til undir- og yfirsummur U og Y fyrir f á bilinu $[a, b]$ þ.a. $Y - U < 2M\delta + \delta + 2M\delta = \delta(4M + 1)$.

Stærðina $\delta(4M + 1)$ má gera eins litla og vera skal svo að f er heildanlegt á bilinu $[a, b]$.

Athugasemd. Með svipuðum aðferðum og er auðvelt að sanna að breyting á endanlega mörgum fallgildum breytir hvorki heildanleika né heildi.

Til að bæta enn við listann þurfum við á skilgreiningu að halda.

Skilgreining 5.2.15. Fall f á bili $[a, b]$ er sagt *samfellt á köflum* á bilinu ef finna má skiptingu P á $[a, b]$ þ.a. f er samfellt á hverju opnu skiptibila P (sem er það sama og að segja að f sé samfellt í öllum punktum bilsins $[a, b]$ nema ef til vill skiptipunktum P).

Með því að nota setningar 5.2.11 og 5.2.14 fæst:

Setning 5.2.16. *Ef f er takmarkað og samfellt á köflum á lokaða bilinu $[a, b]$ þá er f heildanlegt á $[a, b]$.*

Verkefni 5.2

1 (a) Látum n vera jákvæða heila tölu og $[x]$ tákna heiltöluhluta x. Sýnið að

$$\int_0^n [x]^2 dx = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

(b) Finnið öll $a > 0$ þannig að heildi fallsins $[x]^2$ frá 0 til a sé $2(a - 1)$.

2 Sýnið að
$$\int_1^{n^2} [\sqrt{x}]dx = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}.$$

3 Reiknið út heildið
$$\int_0^1 x dx$$
með því að nota skiptinguna $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, 1\}$, reikna tilheyrandi Y og U og láta svo n stefna á óendanlegt.

4 Notið skiptingar af gerðinni $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, 1\}$ til að ákvarða heildið
$$\int_0^1 x^2 dx.$$

5 Notið skiptingar af gerðinni $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, 1\}$ til að ákvarða heildið
$$\int_0^1 x^3 dx$$

6 Látum $\alpha \neq -1$ vera ræða tölu og a, b vera rauntölur þannig að $0 < a < b$. Reiknið heildið
$$\int_a^b x^\alpha dx$$
með því að nota skiptingar af gerðinni $P = \{a, aq, aq^2, aq^3, \ldots, b\}$ þar sem $q = (\frac{b}{a})^{1/n}$.

7 Notið skiptingar af gerðinni $P = \{0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \pi\}$ til að ákvarða heildið
$$\int_0^\pi \sin x \, dx$$

Látum a, b og α vera rauntölur. Reiknið heildin í dæmum 8 og 9 með því að nota vel valdar skiptingar.

8 $\displaystyle\int_a^b \sin(\alpha x)dx$

9 $\displaystyle\int_a^b \cos(\alpha x)dx$

10 Sýnið að runan

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}, \qquad n \geq 1$$

sé samleitin og ákvarðið markgildi hennar.

11 Látum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vera skilgreint með

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Sýnið að f sé heildanlegt á $[-1, 1]$.

5.3 Tengsl heildunar og diffrunar

Við fyrstu sýn virðast heildun og diffrun vera alls óskyldar aðgerðir. Það er hins vegar samband þar á milli. Þessar aðgerðir eru í vissum skilningi andhverfur hvor annarrar. Það var eitt af hinum miklu afrekum Isaacs Newton (1642–1727) að uppgötva samband þeirra aðgerða að finna hallatölu snertilínu ferils og að finna flatarmál svæðis milli ferils og x-áss. (Sjá setningu 5.3.2.) Þetta sambandi diffrunar og heildunar gefur af sér auðvelda leið til að reikna út heildi ýmissa falla.

Látum f vera heildanlegt fall á bili $[a, b]$. Fyrir sérhvert x á bilinu $[a, b]$ þá er f heildanlegt á bilinu $[a, x]$. Setjum

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

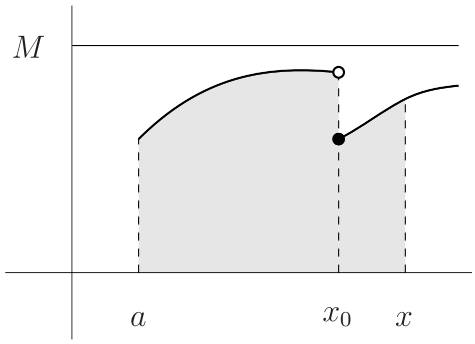
Við ætlum að rannsaka fallið F nánar.

Setning 5.3.1. *Fallið F er samfellt á $[a, b]$.*

Sönnun. Látum $x_0 \in [a, b]$. Á mynd (5.7) er sýnt tilfelli þar sem $0 \leq f \leq M$. Ef $x > x_0$ þá er $F(x) - F(x_0)$ flatarmál svæðisins milli ferils f og bilsins $[x_0, x]$. Af myndinni sést, að $0 \leq F(x) - F(x_0) \leq M(x - x_0)$ og ef $x < x_0$ þá fæst á tilsvarandi hátt að $0 \leq F(x_0) - F(x) \leq M(x_0 - x)$ svo að

$$|F(x) - F(x_0)| \leq M\,|x - x_0|\,,$$

og þar með er $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$.



Mynd 5.7:

Almennt, þá veljum við M þannig að $-M \leq f(x) \leq M$. Þá fæst, að ef $x > x_0$ þá er $-M(x - x_0)$ undirsumma og $M(x - x_0)$ yfirsumma fyrir f á $[x_0, x]$ svo að

$$-M(x - x_0) \leq \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \leq M(x - x_0)$$

og ef $x < x_0$ fæst á sama hátt að

$$-M(x_0 - x) \leq \int_{x}^{x_0} f(t)\, dt \leq M(x_0 - x).$$

Nú er

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \qquad \text{ef } x > x_0$$

og

$$F(x_0) - F(x) = \int_{x}^{x_0} f(t)\, dt \qquad \text{ef } x < x_0$$

svo að

$$|F(x) - F(x_0)| \leq M\, |x - x_0|$$

og þar með er $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$. $\square$

Næsta setning fjallar um diffranleika fallsins F. Hún er oft nefnd *Undirstöðusetning stærðfræðigreiningar.*

Setning 5.3.2. *Látum f vera heildanlegt fall á lokuðu bili $[a, b]$ og látum F vera skilgreint eins og að framan. Ef f er samfellt í punkti x_0 úr opna bilinu (a, b) þá er F diffranlegt í x_0 og $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Sönnun. Við þurfum að sýna fram á að

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0).$$

Við notum skilgreiningu 3.1.10 á markgildi falls. Lát þá k vera gefna náttúrulega tölu. Við höfum

$$\begin{aligned}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}&=\frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h}f(t)\,dt-\int_a^{x_0}f(t)\,dt\right)\\&=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Veljum aðra náttúrulega tölu N þannig að $|f(t)-f(x_0)|<10^{-k}$ ef $|t-x_0|<10^{-N}$. Ef $0<h<10^{-N}$ þá er

$$f(x_0)-10^{-k}<f(t)<f(x_0)+10^{-k}\qquad\text{fyrir öll } t\in[x_0,x_0+h]$$

Með því að heilda fastaföllin $f(x_0)\pm 10^{-k}$ og fallið f á bilinu $[x_0,x_0+h]$ fæst að

$$\int_{x_0}^{x_0+h}(f(x_0)-10^{-k})\,dt\le\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,dt\le\int_{x_0}^{x_0+h}(f(x_0)+10^{-k})\,dt$$

eða

$$h(f(x_0)-10^{-k})\le\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,dt\le h(f(x_0)+10^{-k}).$$

Eftir deilingu með h fæst:

$$f(x_0)-10^{-k}\le\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,dt\le f(x_0)+10^{-k}.$$

Ef $-10^{-N}<h<0$ þá fæst á tilsvarandi hátt að

$$h(f(x_0)-10^{-k})\ge\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,dt\ge h(f(x_0)+10^{-k})$$

sem eftir deilingu með h gefur ójöfnurnar

$$f(x_0)-10^{-k}\le\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,dt\le f(x_0)+10^{-k}$$

Þar með gildir að

$$f(x_0) - 10^{-k} \le \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \le f(x_0) + 10^{-k}$$

ef $0 < |h| < 10^{-N}$, svo að skilyrðunum í skilgreiningu 3.1.10 er fullnægt. Þar neð er

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(F(x_0+h) - F(x_0)\right) = f(x_0).$$

Fallið F er því diffranlegt í x_0 og $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Fylgisetning 5.3.3. *Látum f vera samfellt fall á lokuðu bili $[a, b]$, látum $c \in [a, b]$ og setjum*

$$G(x) = \int_c^x f(t)\, dt \qquad \text{fyrir öll } x \in [a, b].$$

Þá er G stofnfall fyrir f á opna bilinu (a, b), með öðrum orðum er G diffranlegt á (a, b) og $G'(x) = f(x)$ fyrir öll $x \in (a, b)$.

Sönnun. Þar sem fallið f er samfellt á bilinu $[a, b]$ þá er það heildanlegt á bilinu $[x, c]$ ef $x \le c$ og það er heildanlegt á bilinu $[c, x]$ ef $x \ge c$. Látum F vera eins og í setningunni hér að framan. Þá er

$$F(x) - G(x) = \int_a^c f(t)\, dt = F(c)$$

svo að $G(x) = F(x) - F(c)$ og þar með fæst samkvæmt síðustu setningu að $G'(x) = F'(x) = f(x)$ fyrir öll x úr (a, b). □

Fylgisetning 5.3.4. *Látum f og G vera samfelld föll á lokuðu bili $[a, b]$ þannig að G sé stofnfall fyrir f á opna bilinu $[a, b]$. Þá er*

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a).$$

Sönnun. Setjum

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Þá er F samfellt á lokaða bilinu $[a, b]$ og það er jafnframt stofnfall fyrir f á opna bilinu (a, b). Það er því til fasti k þannig að

$$G(x) = F(x) + k$$

fyrir öll x úr opna bilinu (a,b) og þar með einnig fyrir öll x úr lokaða bilinu $[a,b]$ vegna þess að föllin F og G eru bæði samfelld á lokaða bilinu. Með því að setja $x=a$ sést að $k=G(a)$ og þar með er $G(x)=F(x)+G(a)$ fyrir öll x á $[a,b]$. Fyrir $x=b$ fæst þá

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = G(b)-G(a).$$

□

Til að reikna út heildi tiltekins falls f á lokuðu bili $[a,b]$ getum við notað nálgun með yfir- eða undirsummum. Niðurstaðan hér að ofan getur hins vegar oft á tíðum einfaldað slíkt verkefni því samkvæmt henni nægir að finna samfellt fall F á $[a,b]$ sem er stofnfall fallsins f á opna bilinu (a,b). Útkoman úr heildinu er þá mismunurinn á gildum stofnfallsins í endapunktum bilsins, nánar til tekið talan $F(b)-F(a)$.

Dæmi 5.3.5. Heildi margliða. Ef $n\geq 0$ þá er $F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ stofnfall fyrir x^n svo að

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1}).$$

Með því að nota setningu 5.2.7 þá fæst að ef $p(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n$ og ef $q(x)=c_0x+\frac{c_1}{2}x^2+\ldots+\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$ þá er

$$\int_a^b p(x)\,dx = q(b)-q(a).$$

Í 7. kafla munum við ræða nokkrar aðferðir til að ákvarða stofnföll.

Verkefni 5.3

1 Notið undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar til að sannreyna niðurstöður úr dæmum 3-9 í dæmakafla 5.2.

Reiknið heildin í dæmum 2-5.

2 $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/2}(\cos x+\sin x)dx$

3 $\displaystyle\int_0^9 \sqrt{x}dx$

4 $\displaystyle\int_2^3 (1 + x + x^2)dx$

5 $\displaystyle\int_0^\pi (x^{\frac{1}{3}} + \sin x)dx$

Finnið afleiður fallanna í dæmum 6-9.

6 $\displaystyle f(x) = \int_0^x \sin(t^2 - 1)dt$

8 $\displaystyle f(x) = \int_1^{2+\sin x} \sin t dt$

7 $\displaystyle f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1 - \cos(t)}dt$

9 $\displaystyle f(x) = \int_{-2}^{\cos x} \cos x \cos t dt$

Kafli 6

Algeng föll

Í þessum kafla verður fjallað um nokkur algeng föll sem gegna veigamiklu hlutverki í flestum greinum náttúruvísinda.

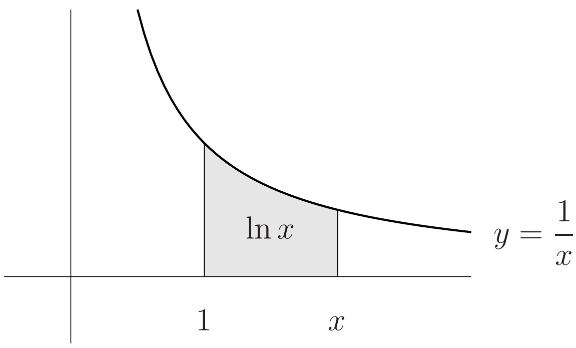
6.1 Lygrar og veldisvísisföll

Setjum $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Skilgreining 6.1.1. Fallið

$$\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}; x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

kallast *náttúrlegi lygrinn*.



Mynd 6.1: Náttúrlegi lygrinn

Athugasemd. Samkvæmt undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar, setningu 5.3.2, er fallið diffranlegt og $d(\ln x)/dx = 1/x > 0$ fyrir öll x úr $\mathbb{R}_+$.

Setning 6.1.2. *Fyrir öll x og y úr $\mathbb{R}_+$ og öll r úr $\mathbb{Q}$ gildir*

(i) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$.
(ii) $\ln(1/x) = -\ln x$.
(iii) $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$.
(iv) $\ln(x^r) = r \ln x$.

Sönnun. (i) Höldum y föstu og diffrum með tilliti til x. Þá fæst

$$\frac{d}{dx}\ln(xy) = \frac{1}{xy}\frac{d}{dx}(xy) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\ln x.$$

Þar með er til fasti C þannig að $\ln xy = \ln x + C$. Setjum $x = 1$ og fáum $\ln y = C$ og því $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

(ii) Við höfum að

$$0 = \ln 1 = \ln(x \cdot (1/x)) = \ln x + \ln(1/x)$$

svo að

$$\ln(1/x) = -\ln x.$$

(iii) $\ln(x/y) = \ln(x \cdot (1/y)) = \ln x + \ln(1/y) = \ln x - \ln y$.

(iv) Við vitum að $d(x^r)/dx = rx^{r-1}$. Þá fæst

$$\frac{d}{dx}(\ln x^r) = \frac{rx^{r-1}}{x^r} = \frac{r}{x} = \frac{d}{dx}(r \ln x).$$

Út frá þessu getum við ályktað að til er fasti C þannig að $\ln(x^r) = r\ln x + C$. Setjum $x = 1$ og fáum $C = 0$. □

Setning 6.1.3.

(i) $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
(ii) $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Sönnun. (i) Fyrir x úr bilinu $[1, 2]$ gildir að $1/2 \le 1/x$. Af því leiðir að

$$\frac{1}{2} = \int_1^2 \frac{1}{2}\,dx \le \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2$$

og þar með $\ln(2^n) = n\ln 2 \geq \frac{n}{2}$. Þar sem $n/2 \to +\infty$ þegar $n \to +\infty$ þá er ljóst að

$$\lim_{n\to+\infty} \ln 2^n = +\infty.$$

Nú er

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$

og ln er stranglega vaxandi fall svo við getum ályktað að

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

(ii) Við höfum að $\ln(1/2^n) = -\ln 2^n \to -\infty$ samkvæmt (i) svo við getum ályktað að

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

$\square$

Athugasemd. Af setningunni leiðir að myndmengi náttúrlega lygrans er allt $\mathbb{R}$.

Skilgreining 6.1.4. Andhverfa náttúrulega lygrans er táknuð með

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+; x \mapsto \exp(x).$$

Athugasemd. Ef $a \in \mathbb{R}_+$ og $r \in \mathbb{Q}$ þá gildir að $\ln a^r = r\ln a$ og því $a^r = \exp(r\ln a)$. Í ljósi þessa er eðlilegt að setja fram eftirfarandi skilgreiningu.

Skilgreining 6.1.5. Látum $a > 0$. Fyrir öll x úr $\mathbb{R}$ setjum við

$$a^x = \exp(x\ln a)$$

og köllum þessa tölu „*a í veldinu x*“. Þannig er a^x sú tala sem hefur náttúrlega lygrann $x\ln a$. Fallið

$$a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+; x \mapsto a^x$$

kallast *veldisvísisfallið með grunntölu a.*

Athugasemd. Við vitum að fallið $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ er bæði eintækt og átækt svo að til er nákvæmlega ein tala, táknum hana með e, þannig að $\ln e = 1$. Um þessa tölu gildir að

$$e^x = \exp(x\ln e) = \exp x.$$

Fallið $x \mapsto e^x = \exp x$ kallast *veldisvísisfallið*, við tilgreinum ekki grunntölunna ef hún er e.

Ekki er mjög erfitt að sýna fram á að talan e er óræð (sjá setningu 6.1.19). Hins vegar er töluvert erfiðara að sýna fram á að talan e er *óalgebruleg* þ.e.a.s. ekki núllstöð í neinni margliðu með ræða stuðla.

Setning 6.1.6. *Látum $a \in \mathbb{R}_+$. Þá gildir*

(i) $a^x a^y = a^{x+y}$

(ii) $(ab)^x = a^x b^x$ *ef* $b > 0$

(iii) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

(iv) $(a^x)^y = a^{xy}$

(v) *Ef $a > 1$ þá er fallið $x \mapsto a^x$ stranglega vaxandi og*

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad og \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$$

(vi) *Ef $a < 1$ þá er fallið $x \mapsto a^x$ stranglega minnkandi og*

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \quad og \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty.$$

Sönnun. (i) $\ln(a^x a^y) = x\ln a + y\ln a = (x+y)\ln a = \ln a^{x+y}$ og þar með $a^x a^y = a^{x+y}$ vegna þess að ln er eintækt.

(ii) $\ln((ab)^x) = x\ln a + x\ln b = \ln a^x + \ln b^x = \ln(a^x b^x)$ og því er $(ab)^x = a^x b^x$ þar sem ln er eintækt.

(iii) $\ln(1/a^x) = -\ln a^x = -x\ln a = \ln a^{-x}$ og þar með $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$.

(iv) $\ln(a^x)^y = y\ln a^x = yx\ln a = \ln a^{xy}$ og þar með $(a^x)^y = a^{xy}$.

(v) Þar sem $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ er andhverfa $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ þá er exp stranglega vaxandi og

$$\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty \quad \text{og} \quad \lim_{x\to-\infty} \exp x = 0.$$

Ef $a > 1$ þá er $\ln a > 0$ og fallið $x \mapsto x\ln a$ er stranglega vaxandi. Nú er $a^x = \exp(x\ln a)$ svo að fallið $x \mapsto a^x$ er samskeyting tveggja stranglega vaxandi falla og því einnig stranglega vaxandi. Ljóst er að $\lim_{x\to+\infty} x\ln a = +\infty$ svo að $\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} \exp(x\ln a) = +\infty$. Einnig er ljóst að $\lim_{x\to-\infty} x\ln a = -\infty$ svo að $\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \exp(x\ln a) = 0$.

(vi) Sannað á sama hátt og (v).

□

Setning 6.1.7. *$da^x/dx = \ln a \cdot a^x$. Sér í lagi gildir að $de^x/dx = e^x$.*

Sönnun. $\ln a^x = x \ln a$. Diffrun báðum megin gefur

$$\frac{1}{a^x} \cdot \frac{da^x}{dx} = \ln a$$

og þar með $da^x/dx = \ln a \cdot a^x$. □

Skilgreining 6.1.8. Látum $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 1$. Andhverfa fallsins

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+; x \mapsto a^x$$

kallast *lygrinn með grunntölu* a og er táknaður með $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Athugasemdir. (i) Fyrir a og y úr $\mathbb{R}_+$, $a \neq 1$ og x úr $\mathbb{R}$ gildir

$$\log_a y = x \quad \text{þá og því aðeins að} \quad y = a^x.$$

(ii) Fyrir a og b úr $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ og x úr $\mathbb{R}_+$ gildir

$$\log_a x = \log_a b^{\log_b x} = \log_b x \cdot \log_a b$$

og því

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Setning 6.1.9. *Fyrir öll a úr $\mathbb{R}$ gildir*

$$\lim_{x \to 0} (1 + ax)^{1/x} = e^a$$

Sönnun. $(1+ax)^{1/x} = e^{(1/x)\ln(1+ax)}$ svo okkur nægir að sýna (vegna samfelldni exp) að $(1/x)\ln(1+ax) \to a$, þegar $x \to 0$. Nú:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+ax) - \ln 1}{x} \\
&= \frac{d}{dx} \ln(1+ax)\bigg|_{x=0} \\
&= \frac{a}{1+ax}\bigg|_{x=0} = a.
\end{aligned}$$

□

Athugasemd. Setninguna má einnig setja fram með $\lim_{x \to +\infty} (1 + a/x)^x = e^a$ eða $\lim_{n \to +\infty} (1 + a/n)^n = e^a$.

Setning 6.1.10. *Fyrir $a > 0$ og $b > 0$ gildir*

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0.$

Sönnun. (i) Ef $c > 0$ og $t \geq 1$ þá er $t^{-1} \leq t^{c-1}$. Fyrir $x > 1$ fæst því

$$0 < \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \leq \int_1^x t^{c-1}\,dt = \frac{x^c}{c} - \frac{1}{c} < \frac{x^c}{c}.$$

Af þessu leiðir að

$$0 < \frac{(\ln x)^b}{x^a} < \frac{(x^c/c)^b}{x^a} = \frac{x^{cb-a}}{c^b} \qquad \text{fyrir öll } c > 0.$$

Veljum $c = a/(2b)$ og fáum $x^{cb-a} = x^{-a/2} \to 0$ þegar $x \to +\infty$.

(ii) Setjum $t = e^x$. Þá er $x = \ln t$ og því $x^b/e^{ax} = (\ln t)^b/t^a$. En $t \to +\infty$ þegar $x \to +\infty$ svo (ii) leiðir af (i). □

Dæmi 6.1.11. Sýnum að $\lim_{x\to0^+} x^\alpha \ln x = 0$ ef $\alpha > 0$.

Úrlausn. Setjum $t = 1/x$. Þá er ljóst að $t \to +\infty$ þegar $x \to 0^+$ og þar af leiðir

$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{t\to+\infty} -\frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

samkvæmt setningunni hér að ofan.

Dæmi 6.1.12. Sýnum að $\lim_{x\to0^+} x^x = 1$.

Úrlausn. $x^x = \exp(x\ln x)$. Þar sem exp er samfellt fæst

$$\lim_{x\to0^+} x^x = \lim_{x\to0^+} \exp(x\ln x) = \exp(\lim_{x\to0^+} x\ln x) = \exp 0 = 1.$$

Dæmi 6.1.13. Sýnum að $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1$.

Úrlausn.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}\right) = \exp 0 = 1.$$

Dæmi 6.1.14. Sýnum að $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$ ef $|x| < 1$.

Úrlausn.

$$\lim_{n\to+\infty} |x|^n = \lim_{n\to+\infty} \exp(n \ln |x|) = 0 \qquad \text{ef } \ln |x| < 0 \text{ þ.e. ef } |x| < 1.$$

Setning 6.1.15. *Látum f vera diffranlegt fall á opnu bili. Fyrir sérhvert x úr bilinu þar sem $f(x) \neq 0$ gildir*

$$\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Sönnun. Ef $f(x) > 0$ þá fæst

$$\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Ef $f(x) < 0$ þá fæst

$$\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{d}{dx}\ln(-f(x)) = \frac{(-f)'(x)}{-f(x)} = \frac{-f'(x)}{-f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

□

Skilgreining 6.1.16. $f'(x)/f(x)$ kallast *lygraafleiða* fallsins f í punktinum x.

Dæmi 6.1.17. Oft er hægt að einfalda reikninga með því að nota lygraafleiður. Setningin segir okkur reyndar að fyrir þau x þar sem $f(x) \neq 0$ gildir að $f'(x) = f(x)d(\ln|f(x)|)/dx$ og oft á tíðum er sýnu einfaldara að reikna $d(\ln|f(x)|)/dx$ en $f'(x)$, sérstaklega ef f er margfeldi einfaldra falla. Beitum reglunni til dæmis á fallið

$$f(x) = (x^2 \cos x \cdot e^{x^3})/(1+x^4)^7.$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)| \\
&= \frac{x^2\cos x \cdot e^{x^3}}{(1+x^4)^7}\frac{d}{dx}\left(\ln x^2 + \ln|\cos x| + x^3 - 7\ln(1+x^4)\right) \\
&= \frac{x^2\cos x \cdot e^{x^3}}{(1+x^4)^7}\left(\frac{2}{x} - \frac{\sin x}{\cos x} + 3x^2 - \frac{28x^3}{1+x^4}\right) \\
&= \left(\frac{2\cos x}{(1+x^4)^7} - \frac{x\sin x}{(1+x^4)^7} + \frac{3x^3\cos x}{(1+x^4)^7} - \frac{28x^4\cos x}{(1+x^4)^8}\right)\cdot xe^{x^3}.
\end{aligned}$$

Við skulum ljúka þessari grein á að fjalla lítillega um Taylor-margliður fallanna exp og ln.

Við höfum $d(e^x)/dx = e^x$ fyrir öll x svo að

$$\mathrm{T}_n(e^x; a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^a}{k!}(x-a)^k.$$

Við vitum að

$$\frac{d(\ln(1-x))}{dx} = \frac{-1}{1-x}$$

og að

$$T_n(\frac{1}{1-x}; 0) = 1 + x + \cdots + x^n.$$

Því fæst samkvæmt reiknireglum um Taylormargliðu (setn. 4.4.8 (ii)) að

$$\mathrm{T}_n(\ln(1-x); 0) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n}.$$

Ef við setjum $-x$ í stað x, þá fæst

$$\mathrm{T}_n(\ln(1+x); 0) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots - (-1)^n \frac{x^n}{n}.$$

Dæmi 6.1.18. Finnið $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)/x - 1}{\ln(1+x)}$.

Úrlausn. $e^x = 1 + x + x^2/2 + \mathrm{R}_2(x)$ og því er

$$\frac{e^x - 1}{x} - 1 = \frac{1 + x + x^2/2 + \mathrm{R}_2(x) - 1}{x} - 1 = \frac{x}{2} + \mathrm{R}_1(x).$$

Ennfremur er

$$\ln(1+x) = x + \mathrm{R}_1(x)$$

og því fáum við

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)/x - 1}{\ln(1+x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{x/2 + \mathrm{R}_1(x)}{x + \mathrm{R}_1(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1/2 + \mathrm{R}_1(x)/x}{1 + \mathrm{R}_1(x)/x} \\
&= \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Að lokum fáum við þá niðurstöðu að talan e er óræð.

Setning 6.1.19. *Talan e er óræð tala.*

Sönnun. Látum $n \geq 1$ vera náttúrlega tölu og x vera jákvæða rauntölu. Samkvæmt leifaformúlu Lagrange (setning 4.4.12) er til t milli 0 og x þannig að

$$\mathrm{R}_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{e^t}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Setjum nú $x = 1$. Það er einfalt mál að sýna að $e < 3$. Þá fæst

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

og margföldun með $n!$ gefur

$$\frac{1}{n+1} \leq e \cdot n! - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \leq \frac{3}{n+1}. \tag{1}$$

Nú er $\sum_{k=0}^{n} n!/k!$ heil tala. Ef e væri ræð tala þá væri til $n \geq 3$ þannig að $e \cdot n!$ væri heil tala. En þá gefur jafna (1) okkur mismun tveggja heiltalna sem liggur á milli $1/(n+1)$ og $3/(n+1)$. $\square$

Verkefni 6.1

1 Látum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vera fall sem uppfyllir skilyrðið

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

fyrir allar rauntölur x og y.

(a) Sýnið að sé f alls staðar diffranlegt þá uppfylli það diffurjöfnuna

$$f'(x) = f'(0)f(x).$$

Ályktið svo út frá því að annaðhvort sé f núllfallið eða til sé tala c þannig að $f(x) = \exp(cx)$ fyrir öll x.

(b) Sýnið að sé f diffranlegt í 0 þá sé f núllfallið eða að til sé rauntala c þannig að $f(x) = \exp(cx)$ fyrir öll x.

2 Látum $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vera fall sem uppfyllir

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

fyrir allar jákvæðar rauntölur x og y.

(a) Sýnið að sé f alls staðar diffranlegt þá sé til rauntala c þannig að $f(x) = c\ln(x)$ fyrir öll x.

(b) Sýnið að sé f diffranlegt í 1 þá sé til rauntala c þannig að $f(x) = c\ln(x)$ fyrir öll x.

3 Látum a vera rauntölu. Notið skilgreininguna á afleiðu til að sýna að

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\ln(1+at) = a$$

Notið þessa niðurstöðu til að sýna að

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

Ákvarðið markgildin í dæmum 4-6.

4 $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} (1-2^x)^{\sin x}$

5 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\ln\frac{1}{x})^x$

6 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{\exp(\sqrt{\ln x})}, \quad \alpha\in\mathbb{R}$

7 Látum a og b vera jákvæðar rauntölur. Rannsakið hegðun fallsins

$$f(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, \quad x\neq 0$$

þegar $x\to\infty$, þegar $x\to-\infty$ og þegar $x\to 0$.

8 Sýnið að um allar náttúrlegar tölur $n\geq 2$ gildi ójafnan

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < \ln n < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

Sýnið svo að runan

$$a_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n, \quad n \geq 1$$

sé takmörkuð, og loks að hún sé samleitin og hafi markgildi a þar sem $\frac{1}{2} < a < 1$. Markgildið, $a = 0.5772\ldots$, er nefnt *fasti Eulers*. Ekki er vitað hvort fasti Eulers er ræð tala eða óræð.

9 Sýnið að

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1} \to \frac{1}{2}\ln 2$$

þegar $n \to \infty$.

6.2 Breiðbogaföll, hornaföll og andhverfur þeirra

Helstu hornaföllin eru

$$\sin x \quad \text{og} \quad \cos x,$$

fyrir öll x úr $\mathbb{R}$;

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{og} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

skilgreind fyriröll x úr $\mathbb{R}$ þannig að $x \neq \pi/2 + n\pi$ með n úr $\mathbb{Z}$;

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \quad \text{og} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

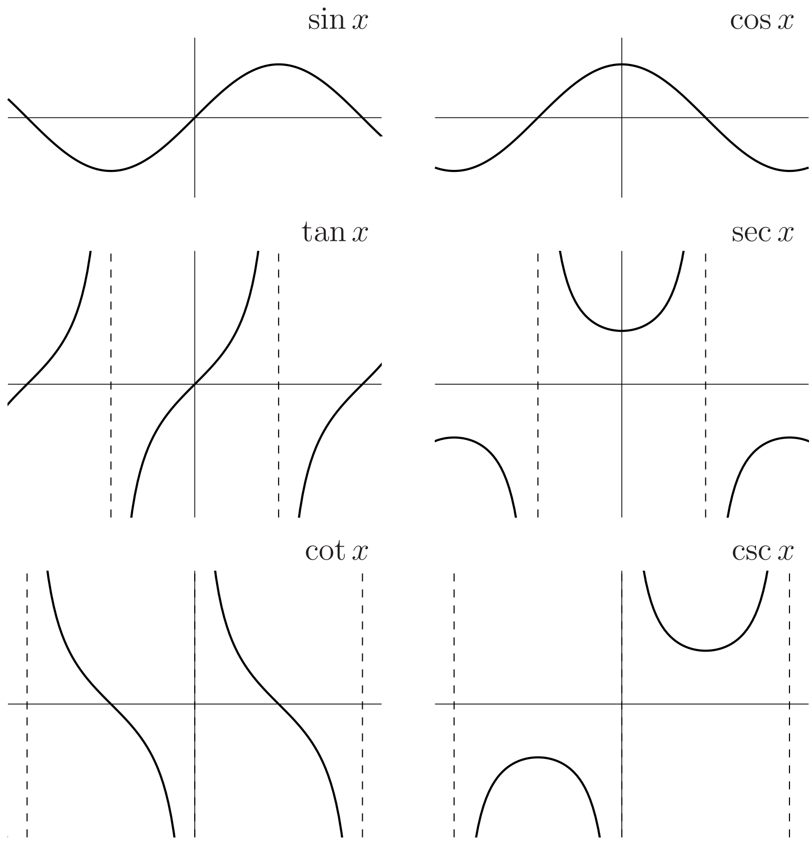
skilgreindfyriröll x úr $\mathbb{R}$ þannig að $x \neq n\pi$ með n úr $\mathbb{Z}$.

Úr 4. kafla vitum við að $\mathrm{D}\,(\sin x) = \cos x$ og $\mathrm{D}\,(\cos x) = -\sin x$. Með því að nota reiknireglur fyrir afleiður er því fljótséð að $\mathrm{D}\,(\tan x) = \sec^2 x$, $\mathrm{D}\,(\cot x) = -\csc^2 x$, $\mathrm{D}\,(\sec x) = \sec x \cdot \tan x$ og $\mathrm{D}\,(\csc x) = -\csc x \cdot \cot x$. Með diffrun sést einnig að

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$$

og

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C = -\ln|\csc x| + C.$$



Mynd 6.2: Hornaföllin

Við sjáum í kafla 7 (dæmi 7.5.1) að

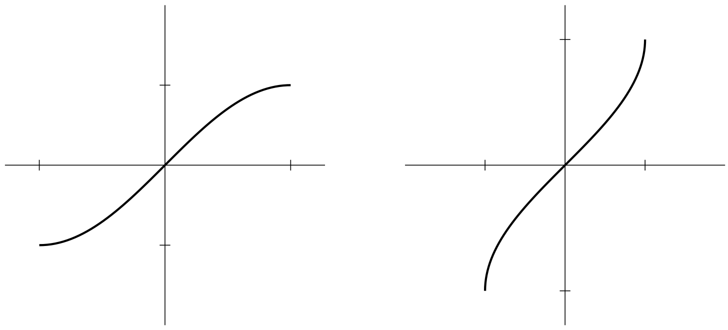
$$\int \sec x\,dx = \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

Á samsvarandi hátt getum við fengið

$$\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C.$$

Ef við einskorðum sínusfallið við bilið $[-\pi/2, \pi/2]$ þá fæst eintækt fall. Nánar tiltekið er fallið $[-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}; x \mapsto \sin x$ eintækt. Fallið er stranglega vaxandi á bilinu, $\sin(-\pi/2) = -1$ og $\sin(\pi/2) = 1$ svo að fallið $[-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]; x \mapsto \sin x$ er gagntækt. Andhverfa þess er táknuð með

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2].$$



Mynd 6.3: sin og arcsin

Samkvæmt reglunni um diffrun andhverfu (setningu 4.1.11) fæst fyrir $-1 < y < 1$ að

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\,(\arcsin y) &= \frac{1}{(\mathrm{D}\,(\sin))(\arcsin y)} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin y)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \end{aligned}$$

svo að $\arcsin x$ er stofnfall fyrir $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ og þar með

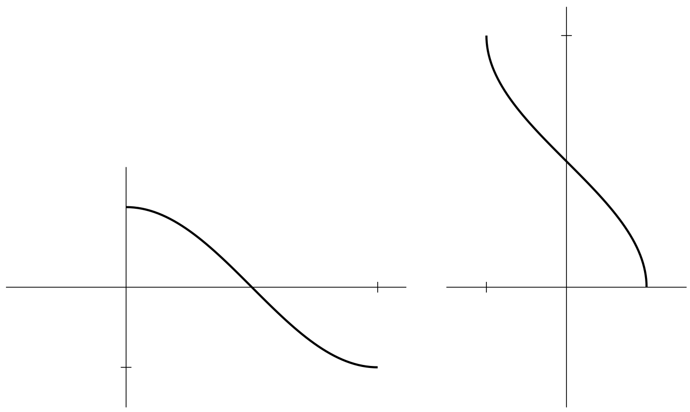
$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

(Fallið $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ er takmarkað á $[0, x]$ ef $0 < x < 1$ og á bilinu $[x, 0]$ ef $-1 < x < 0$). Eins fæst að fallið $[0, \pi] \to [-1, 1]; x \mapsto \cos x$ er gagntækt og andhverfa þess er táknuð með

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

Á sama hátt og að ofan fæst að

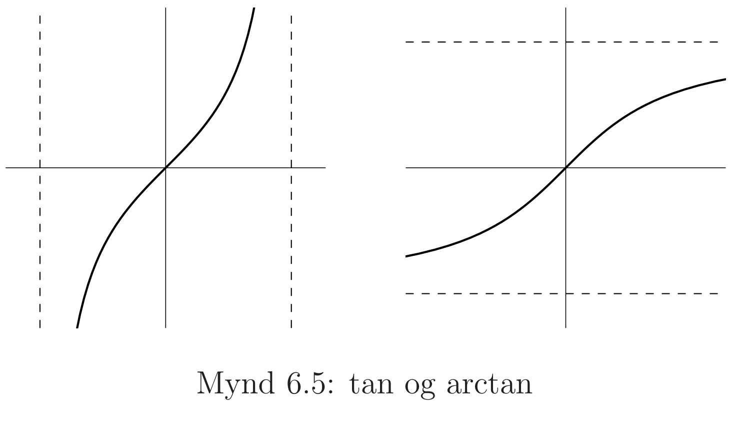
$$\mathrm{D}\,(\arccos y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \text{ef } -1 < y < 1.$$



Mynd 6.4: cos og arccos

Fallið $(-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}; x \mapsto \tan x$ er stranglega vaxandi vegna þess að $\mathrm{D}(\tan x) = 1/\cos^2 x > 0$. Ennfremur sést að $\lim_{x\to-\pi/2} \tan x = -\infty$ og $\lim_{x\to\pi/2} \tan x = +\infty$. Þar með er fallið gagntækt og við táknum andhverfu þess með

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$



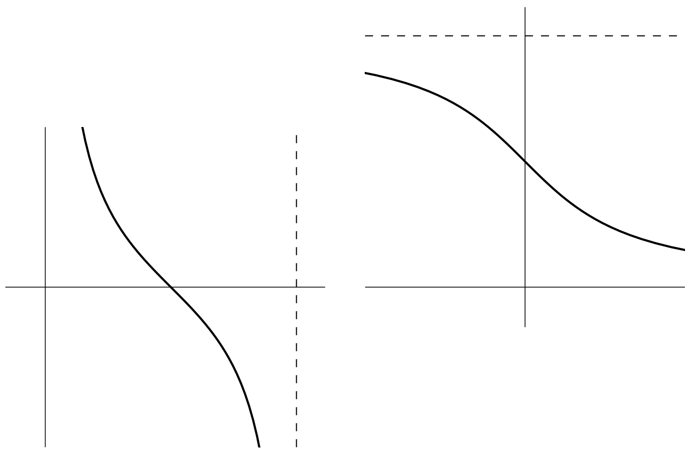
Mynd 6.5: tan og arctan

Reiknum nú afleiðu arctan.

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\,(\arctan y) &= \frac{1}{(\mathrm{D}\,(\tan))(\arctan y)} \\
&= \frac{1}{\sec^2(\arctan y)} \\
&= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} \\
&= \frac{1}{1+y^2}.
\end{aligned}$$

Á svipaðan hátt fæst að fallið $(0,\pi) \to \mathbb{R}; x \mapsto \cot x$ er gagntækt. Við táknum andhverfu þess með

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to [0,\pi]$$



Mynd 6.6: cot og arccot

Líkt og að ofan fæst að $\mathrm{D}\,(\operatorname{arccot} y) = -1/(1+y^2)$.
Eins og fyrir föllin hér að framan fæst að föllin

$$[0,\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2},\pi] \to (-\infty,-1] \cup [1,+\infty); x \mapsto \sec x$$

og

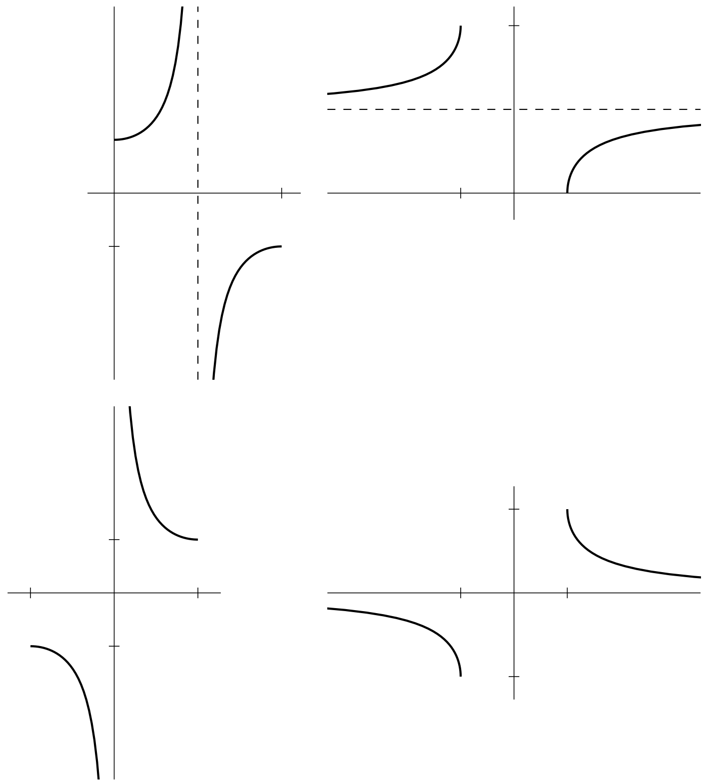
$$[-\frac{\pi}{2},0) \cup (0,\frac{\pi}{2}] \to (-\infty,-1] \cup [1,+\infty); x \mapsto \csc x$$

eru gagntæk. Við táknum andhverfur þeirra með

$$\operatorname{arcsec} : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$$

og

$$\operatorname{arccsc} : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}].$$



Mynd 6.7: sec og arcsec, csc og arccsc

Reiknum nú afleiðu arcsec.

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\,(\operatorname{arcsec} y) &= \frac{1}{(\mathrm{D}\,(\sec))(\operatorname{arcsec} y)} \\ &= \frac{1}{\sec(\operatorname{arcsec} y) \cdot \tan(\operatorname{arcsec} y)} \end{aligned}$$

Við vitum að $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ svo að

$$\tan x = \sqrt{\sec^2 x - 1} \qquad \text{ef } x \in [0, \pi/2)$$

og

$$\tan x = -\sqrt{\sec^2 x - 1} \qquad \text{ef } x \in (\pi/2, \pi].$$

Ef $y \in (-\infty, -1]$ þá er $\operatorname{arcsec} y \in (\pi/2, \pi]$ og því

$$\tan(\operatorname{arcsec} y) = -\sqrt{\sec^2(\operatorname{arcsec} y) - 1} = -\sqrt{y^2 - 1}.$$

Eins fæst að $\tan(\operatorname{arcsec} y) = \sqrt{y^2 - 1}$ ef $y \in [1, +\infty)$. Við fáum því að $\mathrm{D}\,(\operatorname{arcsec} y) = 1/(|y|\sqrt{y^2 - 1})$. Á svipaðan hátt fæst $\mathrm{D}\,(\operatorname{arccsc} y) = -1/(|y|\sqrt{y^2 - 1})$.

Dæmi 6.2.1. Í 9. kafla þessarar bókar verður fjallað um diffurjöfnur. Flestir lesendur hafa þó líklega haft einhver kynni af þeim í framhaldsskólum. Í þessu dæmi ætlum við að leysa diffurjöfnuna

$$y'' = -k^2 y,$$

þar sem k er fasti sem er ekki 0. Þetta er dæmi um 2. stigs diffurjöfnu, þ.e.a.s. 2. afleiða óþekkta fallsins kemur fyrir í jöfnunni. Þegar talað er um að „leysa“ diffurjöfnu þá er átt við að finna *öll* föll sem uppfylla hana. Þar sem $(\cos(kx))'' = -k^2 \cos(kx)$ og $(\sin(kx))'' = -k^2 \sin(kx)$ þá eru $\cos(kx)$ og $\sin(kx)$ lausnir á diffurjöfnunni. Raunar fæst með beinum reikningum að öll föll af gerðinni

$$f(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

þar sem A og B eru fastar, uppfylla diffurjöfnuna.

Sýnum nú að þetta séu einu föllin.

Gerum ráð fyrir að f sé lausn á diffurjöfnunni. Ef $f(x)$ er af gerðinni $A\cos(kx) + B\sin(kx)$ þá gildir nauðsynlega að $f(0) = A$ og $(1/k)f'(0) = B$. Setjum því $g(x) = f(0)\cos(kx) + (1/k)f'(0)\sin(kx)$ og sýnum að fallið $h(x) = f(x) - g(x)$ sé núll fyrir öll x. Nú gildir að $h''(x) = -k^2 h(x)$, þ.e. fallið h uppfyllir diffurjöfnuna vegna þess að bæði f og g uppfylla hana. Ennfremur er $h(0) = h'(0) = 0$. Lítum nú á fallið $H(x) = (h'(x))^2 + k^2 (h(x))^2$. Við sjáum að $H(0) = 0 + 0 = 0$ og

$$\begin{aligned} H'(x) &= 2h''(x)h'(x) + 2k^2 h'(x)h(x) \\ &= 2h'(x)\left(h''(x) + k^2 h(x)\right) \\ &= 2h'(x) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Af þessu leiðir að $H(x) = 0$ fyrir öll x. En það hefur í för með sér að $h(x) = 0$ fyrir öll x svo að h er núllfallið. Við höfum því sýnt að

$$f(x) = f(0)\cos(kx) + \frac{1}{k} \cdot f'(0) \cdot \sin(kx) \qquad \text{fyrir öll } x.$$

Dæmi 6.2.2. Finnið öll diffranleg föll

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

sem uppfylla jöfnuna

$$f'(t) = f(-t) \qquad \text{fyrir öll } t \text{ úr } \mathbb{R} \tag{1}$$

Úrlausn. Ef f er diffranlegt fall sem uppfyllir (1) þá er fallið $t \mapsto f(-t)$ diffranlegt (samskeyting diffranlegra falla) og þar með einnig fallið f'. Diffrun gefur því

$$f''(t) = -f'(-t) = -f(t).$$

Við sjáum því að sérhver lausn á (1) er einnig lausn á diffurjöfnunni

$$y'' = (-1) \cdot y.$$

Samkvæmt dæminu hér að ofan er sérhver lausn þessarar diffurjöfnu af gerðinni $A\cos t + B\sin t$. Stingum nú $f(t) = A\cos t + B\sin t$ inn í (1) og fáum

$$\begin{aligned}(A\cos t + B\sin t)' &= -A\sin t + B\cos t \\ &= A\cos(-t) + B\sin(-t) \\ &= A\cos t - B\sin t.\end{aligned}$$

Af þessu sést að $A = B$ (t.d. með því að taka $t = 0$). Við getum því ályktað að allar lausnir á (1) eru af gerðinni $A(\cos t + \sin t)$ þar sem A er fasti. Á hinn bóginn er fljótséð að öll slík föll eru lausnir á (1) svo við höfum því sýnt að f er lausn á (1) þá og því aðeins að til sé fasti A þannig að $f(t) = A(\cos t + \sin t)$.

Við skulum nú snúa okkur að breiðbogaföllum. Fallið

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

kallast *breiðbogakósínus* og er skilgreint fyrir öll x úr $\mathbb{R}$. Fallið

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

kallast *breiðbogasínus* og er skilgreint fyrir öll x úr $\mathbb{R}$. Fallið

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

kallast *breiðbogatangens* og er skilgreint fyrir öll x úr $\mathbb{R}$. Fallið

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

kallast *breiðbogakótangens* og er skilgreint fyrir öll x úr $\mathbb{R}$, $x \neq 0$. Fallið

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

kallast *breiðbogasekans* og er skilgreint fyrir öll x úr $\mathbb{R}$. Fallið

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

kallast *breiðbogakósekans* og er skilgreint fyrir öll x úr $\mathbb{R}$, $x \neq 0$. (Fallrit breiðbogafallanna er að finna á mynd 6.8 í lok kaflans.)

Setning 6.2.3. *Fyrir öll x og y úr $\mathbb{R}$ gildir*

(i) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(ii) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

(iii) $\sinh(x + y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y$

(iv) $\cosh(x + y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$

(v) $\cosh^2 x = \dfrac{\cosh(2x) + 1}{2}$

(vi) $\sinh^2 x = \dfrac{\cosh(2x) - 1}{2}$

Fyrir $x \neq 0$ gildir ennfremur

(vii) $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x.$

Sönnun. Byggist á einföldum reikningum sem eru eftirlátnir lesendum. □

Athugasemd. Samkvæmt (i) sést að fyrir sérhvert t úr $\mathbb{R}$ liggur punkturinn $(\cosh t, \sinh t)$ á breiðboganum sem gefinn er með jöfnunni $x^2 - y^2 = 1$. Þar eð $\cosh t > 0$ fyrir öll t þá sést jafnframt að punkturinn er á hægri grein breiðbogans ($x > 0$). Auðvelt er að sýna að $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er gagntækt fall svo ef punkturinn (x, y) uppfyllir jöfnuna $x^2 - y^2 = 1$ og $x > 0$, þá er til nákvæmlega eitt t úr $\mathbb{R}$ þannig að $\sinh t = y$. En þá fæst

$$x = \sqrt{1 + y^2} = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \cosh t.$$

Við fáum því að fyrir sérhvern punkt (x, y) á hægri grein breiðbogans er til nákvæmlega eitt t úr $\mathbb{R}$ þannig að $(x, y) = (\cosh t, \sinh t)$.

Af þessum eiginleika eru nöfn fallanna dregin.

Setning 6.2.4. *Eftirfarandi reglur gilda um afleiður breiðbogafalla:*

(i) $\mathrm{D}(\cosh x) = \sinh x$
(ii) $\mathrm{D}(\sinh x) = \cosh x$
(iii) $\mathrm{D}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$
(iv) $\mathrm{D}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$
(v) $\mathrm{D}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x$
(vi) $\mathrm{D}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \cdot \coth x$

Sönnun. Eftirlátin lesendum. □

Athugasemd. Andhverfur breiðbogafallanna er hægt að setja fram með því að nota náttúrulega lygrann. Tökum þrjú dæmi.

(i) Fallið $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er gagntækt og á sér því andhverfu sem er táknuð með Arsinh. Setjum $y = \sinh x = (e^x - e^{-x})/2$. Þá er $\sqrt{1 + y^2} = \cosh x = (e^x - e^{-x})/2$ og við fáum

$$\begin{aligned} y + \sqrt{1 + y^2} &= \sinh x + \cosh x \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x \end{aligned}$$

og því $x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$, þ.e.a.s.

$$\operatorname{Arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y \mapsto \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$$

(ii) Fallið $[0, +\infty) \to [1, +\infty); x \mapsto \cosh x$ er gagntækt og fyrir öll x úr $[0, +\infty)$ gildir $\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1}$. Setjum $y = \cosh x$ og fáum $y + \sqrt{y^2 - 1} = \cosh x + \sinh x = e^x$ og þar með $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$, þ.e.a.s.

$$\operatorname{Arcosh} : [1, +\infty) \to [0, +\infty); y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

(iii) tanh : $\mathbb{R} \to (-1,1)$ er gagntækt fall. Setjum $y = \tan x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x}) = (e^{2x} - 1)/(e^{2x} + 1)$ Þá fæst $(1+y)/(1-y) = e^{2x}$ og þar með $x = (1/2)\ln\left((1+y)/(1-y)\right)$. Við fáum því

$$\text{Artanh} : (-1,1) \to \mathbb{R}; y \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Við ljúkum þessari grein á því að finna Taylor-margliður fallanna cosh, sinh og arctan í núlli.

Við höfum sýnt að

$$\mathrm{T}_n(e^x; 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

og þar með

$$\mathrm{T}_n(e^{-x}; 0) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n!}.$$

Af þessu leiðir að

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{2n}(\cosh x; 0) &= \mathrm{T}_{2n}(\tfrac{1}{2}e^x + \tfrac{1}{2}e^{-x}; 0) \\
&= \frac{1}{2}\big(\mathrm{T}_{2n}(e^x; 0) + \mathrm{T}_{2n}(e^{-x}; 0)\big) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}.
\end{aligned}$$

Með diffrun fæst (sjá setningu 4.4.8)

$$\mathrm{T}_{2n-1}(\sinh x; 0) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Við þekkjum formúluna

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Með því að setja $-x^2$ í stað x fæst

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}.$$

Af þessu má sjá að

$$\mathrm{T}_{2n}(\frac{1}{1+x^2}; 0) = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n}$$

En hér að framan sýndum við að $\mathrm{D}\,(\arctan x) = 1/(1+x^2)$ svo samkvæmt setningu 4.4.8 fæst (munið að $\arctan(0) = 0$):

$$\mathrm{T}_{2n+1}(\arctan x; 0) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Verkefni 6.2

1 Sannið setningu 6.2.3.

2 Sannið setningu 6.2.4.

Setjið föllin í dæmum 3-7 fram sem margliður í x og kvaðratrætur af margliðum í x.

3 $\sinh(2\,\mathrm{Arsinh}\,x),\ \ x \in \mathbb{R}$

4 $\tanh(\mathrm{Arsinh}\,x),\ \ x \in \mathbb{R}$

5 $\cos(\arcsin x),\ \ x \in [-1, 1]$

6 $\arcsin(\cos x), x \in [0, \pi]$

7 $\sin(2\arctan x), x \in \mathbb{R}$

Finnið afleiður fallanna í dæmum 8-16.

8 $\sinh x \sinh 5x$

9 $\sinh(\cos 8x)$

10 $\sinh^2 x + \cosh^2 x$

11 $\exp(\tanh 2x)$

12 $\dfrac{\cosh x}{a + \tanh x}$

13 $\mathrm{Arcosh}(x^2 + 2)$

14 $x\,\mathrm{Artanh}(x^2 - 1)$

15 $\exp(1 + \mathrm{Arsinh}\,x)$

16 $\mathrm{Arsinh}(\cos 3x)$

Teiknið ferla fallanna í dæmum 17-20.

17 $y = \tanh 3x$

18 $y = \cosh 2x$

19 $y = \sinh^2 x$

20 $y = \cosh^2 x$

Í dæmum 21-24 skal finna $\dfrac{dy}{dx}$.

21 $\dfrac{\sinh(x+y)}{xy} = 1$

22 $\tanh 3xy + \sinh y = 1$

23 $x + \cosh xy = 3$

24 $\coth(x-y) - 3y = 6$

Ákvarðið í hvaða punktum x föllin í dæmum 25-28 eru diffranleg og finnið afleiður þeirra þar sem þær eru til.

25 $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

26 $f(x) = \arctan(\tan^2 x)$

27 $f(x) = \arctan(x + \sqrt{1+x^2})$

28 $f(x) = \ln(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}})$

29 Er fallið $\text{Arcosh}(\sqrt{x^2+1})$ alls staðar diffranlegt?

30 Finnið tölu λ þannig að fallið $f(x) = \sin^2(x)\ln(1+x) - \lambda \sinh^3(x/2)$ hafi útgildi í punktinum 0. Hvort er um há- eða lággildi að ræða?

31 Finnið allar lausnir diffurjöfnunnar $y'' + 9y = 0$.

32 Finnið allar þær lausnir diffurjöfnunnar $y'' + 4y = 0$ sem fullnægja skilyrðunum $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

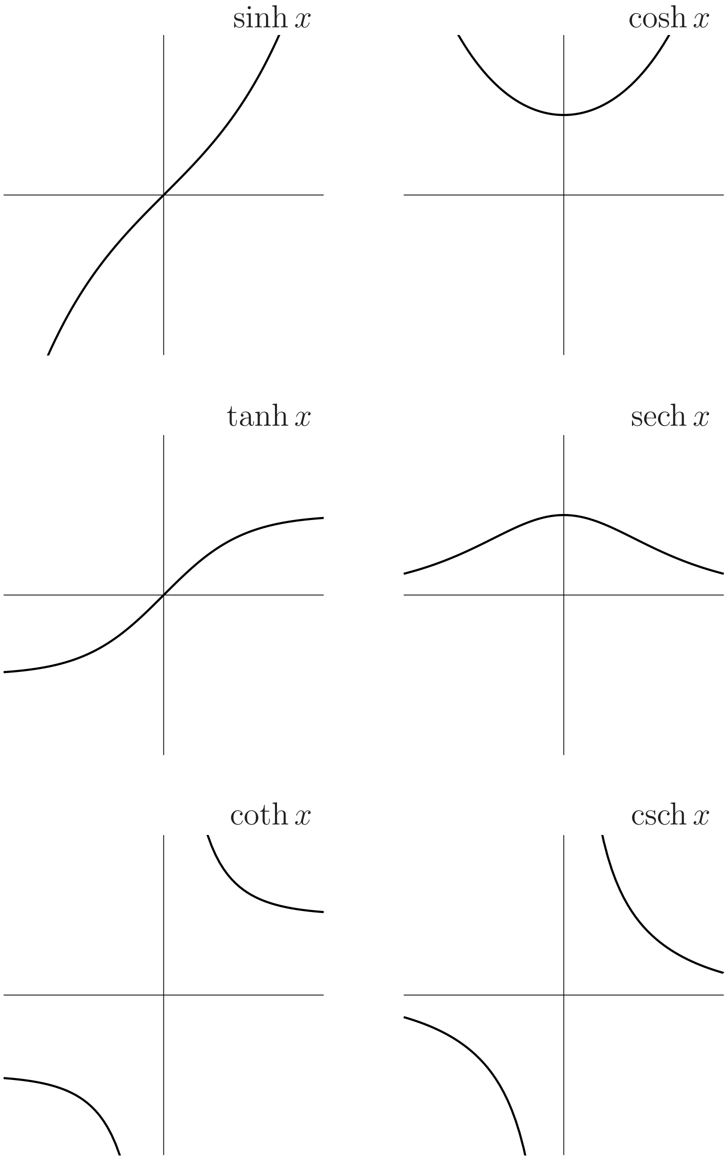
33 Hægt er að sýna fram á að lengd diffranlegs ferils $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ er gefin með heildinu

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

Finnið öll diffranleg föll $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sem fullnægja jöfnunni

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx,$$

fyrir hvaða rauntölur a og b sem er.



Mynd 6.8: Breiðbogaföllin

Kafli 7

Frekari heildun

7.1 Hlutheildun

Við sáum í umfjöllun um tengsl diffrunar og heildunar að ef reikna á heildi tiltekins falls þá er stofnfall fallsins gott hjálpartæki. Við skulum því athuga nokkrar aðferðir til að ákvarða stofnföll. Ef f er samfellt fall á opnu bili I og ef G er stofnfall fyrir f þá þýðir það að G er diffranlegt á I og $G' = f$. Sérhvert annað stofnfall er þá af gerðinni $G + C$ þar sem C er fasti. Ef til dæmis c er punktur úr bilinu I og F er fallið á I sem skilgreint er með

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

þá er $F = G + C_1$, þar sem $C_1 = -G(c)$. Ótiltekið stofnfall G fyrir f á I táknum við með

$$\int f(x)\,dx \quad \text{eða með} \quad \int f\,dx$$

þannig er t.d.

$$\int x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

og

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

Ýmsar reglur diffurreiknings gefa formúlur fyrir stofnföll. Þar sem $(aF + bG)' = aF' + bG'$ þá er

$$\int (af(x) + bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx + c$$

Lítum á regluna um diffrun margfeldis tveggja falla:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Þessa reglu má líka orða þannig að fg sé stofnfall fyrir $f'g + fg'$ og þar með er

$$\int (f'g + fg')\,dx = fg + C \tag{1}$$

Við umritum vinstri hlið

$$\int (f'g + fg')\,dx = \int f'g\,dx + \int fg'\,dx$$

það er

$$fg + C = \int f'g\,dx + \int fg'\,dx$$

svo við fáum

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx \tag{2}$$

Athugið að hér þurfum við ekki að nota fastann C , hann er innbyggður í $\int fg'\,dx$.

Formúlan (2) kallast *hlutheildunarformúlan*. Þegar við notum hlutheildunarformúluna til að ákvarða gefið heildi þurfum við að þátta fallið undir heildismerkinu í tvo þætti, f' og g. Við reynum að velja þessa þætti þannig að auðvelt sé að finna stofnfall f' og þannig að einfaldara sé að finna $\int fg'\,dx$ heldur en $\int f'g\,dx$.

Næstu dæmi sýna hvernig ákvarða má stofnföll með *hlutheildun*, þ.e.a.s. með því að beita hlutheildunarformúlunni.

Dæmi 7.1.1. Ákvarðið $\displaystyle\int x \cos x\,dx$.

Úrlausn. Látum $f'(x) = \cos x$ og $g(x) = x$ þá getur f verið fallið $f(x) = \sin x$ og $g'(x) = 1$ svo að

$$\int x \cdot \cos x\,dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 1\,dx \tag{3}$$

Nú er

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \tag{4}$$

svo að
$$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x + \cos x + C. \tag{5}$$

Athugið að C í jöfnu (5) er ekki endilega það sama og í jöfnu (4). Í báðum tilfellum er um einhvern ótiltekinn fasta að ræða. Athugið einnig að best er að velja f sem einfaldast en auðvitað hefðum við líka getað valið t.d. $f(x) = \sin x + 1$.

Stundum getur þurft að hlutheilda oftar en einu sinni.

Dæmi 7.1.2. Finnið $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$.

Úrlausn. Við reynum að lækka veldið á x-inu, svo að við setjum $f'(x) = \sin x$ og $g(x) = x^2$, þá er $f(x) = -\cos x$ og $g'(x) = 2x$, svo að

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \sin x \, dx &= -x^2 \cos x - \int (-\cos x) \cdot 2x \, dx \\ &= -x^2 \cdot \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.\end{aligned}$$

Dæmi 7.1.3. Finnið $\displaystyle\int e^x \sin x \, dx$.

Úrlausn. Hér þarf líka að hlutheilda tvisvar, en við fáum lausnina með öðrum hætti en gert var hér að ofan. Við setjum $f'(x) = e^x$ og $g(x) = \sin x$. Þá er $f(x) = e^x$ og $g'(x) = \cos x$ svo að

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Við beitum hlutheildun til að reikna nýja heildið. Setjum $f'(x) = e^x$ og $g(x) = \cos x$. Þá er $f(x) = e^x$ og $g'(x) = -\sin x$ svo að

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx.$$

Við setjum þessa niðurstöðu inn í fyrri jöfnuna og fáum

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx.$$

Með því að flytja heildið í hægri hlið jöfnunnar yfir í vinstri hlið hennar fæst:

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x + C$$

svo að

$$\int e^x \sin x\,dx = \tfrac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C,$$

(ekki sama C og fyrir ofan).

Dæmi 7.1.4. Finnið $\displaystyle\int \ln x\,dx$.

Úrlausn. Hér verðum við að velja $f'(x) = 1$ og $g(x) = \ln x$. Þá er $f(x) = x$ og $g' = \frac{1}{x}$ svo að

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx\\ &= x\ln x - x + C.\end{aligned}$$

Við skulum næst leiða út hina svokölluðu heildisformúlu fyrir leifina sem fæst þegar fall er nálgað með Taylor margliðu af n-ta stigi.

Setning 7.1.5. *Látum f vera fall sem er $(n+1)$-sinnum diffranlegt með samfelldar afleiður á opnu bili I og látum $a \in I$. Þá gildir um sérhvert $x \in I$ að*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{R}_n(x)$$

þar sem

$$\mathrm{R}_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \tag{6}$$

Sönnun. Við sönnum setninguna með þrepun eftir n. Ef $n = 0$ þá stendur að

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

sem er augljóslega rétt, þar sem f' er samfellt og f er stofnfall fyrir f'.

Gerum því ráð fyrir því að setningin sé rétt fyrir eitthvert n og sönnum hana fyrir $n+1$. Samkvæmt forsendu gildir að

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{R}_n(x) \tag{7}$$

þar sem $\mathrm{R}_n(x)$ er eins og (6) segir til um. Við ætlum að beita hlutheildun á leifina (6). Fáum að

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt &= \frac{1}{n!}\left[\frac{-1}{n+1}(x-t)^{n+1}f^{(n+1)}(t)\right]_a^x \\ &\quad -\frac{1}{n!}\cdot\frac{-1}{n+1}\int_a^x (x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt\end{aligned}$$

svo að

$$\mathrm{R}_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}f^{(n+1)}(a) + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^x (x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt.$$

Sé þetta sett inn í stað $\mathrm{R}_n(x)$ í (7) er niðurstaðan fengin. $\square$

Dæmi 7.1.6. Ef $f(x) = e^x$ þá gildir um öll x á bilinu $[0,1]$ að

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \le \mathrm{R}_n(x) \le e\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

vegna þess að $1 \le e^x \le e$ ef $x \in [0,1]$. Nú er $e < 3$ svo að $\mathrm{R}_n(x) \le 3\frac{1}{(n+1)!}$ ef $x \in [0,1]$. Ef $n = 12$ þá fæst að $\mathrm{R}_{12}(x) \le 10^{-8}$ svo að $e = \sum_{k=0}^{12}\frac{1}{k!} = 2{,}71828183$ með átta aukastöfum (sjá aftast í grein 6.1). Með svipuðum aðferðum má reikna út önnur gildi veldisvísafallsins með eins mikilli nákvæmni og krafist er.

Verkefni 7.1

Reiknið óákveðnu heildin í dæmum 1-15.

1 $\int x^2 \ln x dx$

2 $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

3 $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

4 $\displaystyle\int x^3 e^x\,dx$

5 $\displaystyle\int x^2 3^x\,dx$

6 $\displaystyle\int (x+1)\,dx$

7 $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$

8 $\int x^3 \sin x \, dx$

9 $\int \cos^3 x \, dx$

10 $\int \sin^3 x \, dx$

11 $\int \cos^4 x \, dx$

12 $\int \sin^4 x \, dx$

13 $\int e^{ax} \cos bx \, dx$

14 $\int e^{ax} \sin bx \, dx$

15 $\int x5^x \sin 3x \, dx$

16 Gerið grein fyrir því að

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx, \qquad n \geq 2$$

og sannið síðan formúlurnar

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx = \frac{2m-1}{2m} \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx = \frac{2m}{2m+1} \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{2}{3}$$

Notið svo formúluna til að sanna *formúlu Wallis*:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{5} \frac{6}{7} \cdots$$

[Ábending:

$$1 \leq \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx} \leq \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+2} x \, dx} = \frac{2m+2}{2m+1}\Bigg]$$

7.2 Heildun með innsetningu

Látum g vera diffranlegt fall á opnu bili I, látum F vera diffranlegt á opnu bili J með $F' = f$ og gerum ráð fyrir að $g(x) \in J$ fyrir öll x í I. Þá leiðir af keðjureglunni að fallið $H(x) = F(g(x))$ er diffranlegt á I og

$$H'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Með öðrum orðum er fallið $H = F \circ g$ stofnfall fyrir fallið $(f \circ g)g'$ svo að

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Af keðjureglunni leiðir því eftirfarandi reglu: Til þess að finna stofnfall fyrir fallið $f(g(x))g'(x)$ þá ákvörðum við fyrst stofnfall F fyrir f og skeytum síðan saman F og g. Til dæmis þá er

$$\int \sin x^2 \cdot 2x\,dx = -\cos x^2 + C$$

því fallið $v(x) = \sin x^2 \cdot 2x$ má rita $v(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ ef $f(t) = \sin t$ og $g(x) = x^2$, og almennt fæst að

$$\int \sin \phi(x) \cdot \phi'(x) = -\cos \phi(x) + C.$$

Stundum þarf lagfæringar við áður en hægt er að beita þessari aðferð.

Dæmi 7.2.1. Ákvarðið $\displaystyle\int \cos^2 x \cdot \sin x\,dx$.

Úrlausn. Við ætlum að reyna að skrifa $\cos^2 x \cdot \sin x = f(g(x)) \cdot g'(x)$. Ef $g(x) = \cos x$ þá er $g'(x) = -\sin x$. Við skrifum því $\cos^2 x \cdot \sin x = -\cos^2 x \cdot (-\sin x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ ef $f(t) = t^2$ og $g(x) = \cos x$. Þar sem $F(t) = \frac{1}{3}t^3$ er stofnfall fyrir f fæst að

$$\int \cos^2(x) \cdot \sin x\,dx = -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

Í dæmum af þessari gerð getur verið handhægt að nota eftirfarandi skammstafanir:

Í formúlunni

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

setjum við u í stað $g(x)$ og du í stað $g'(x)dx$. Þá stendur

$$\int f(u)\,du = F(u) + C.$$

Í dæminu að ofan kemur þetta þannig út:

$$u = \cos x, \quad du = -\sin x dx$$

svo að

$$\int \cos^2(x) \cdot \sin x \, dx = \int -u^2 \, du = \tfrac{1}{3}u^3 + C = \tfrac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

Það sem oft veldur erfiðleikum í þessum dæmum er ákvörðun á u (þ.e. $g(x)$).

Dæmi 7.2.2. Ákvarðið $\int x^2\sqrt{x+1}\, dx$.

Úrlausn. Við ætlum að skrifa $x^2\sqrt{x+1} = f(g(x))g'(x)$. Prófum $u = g(x) = x+1$ þá er $x = u-1$ svo að $x^2\sqrt{x+1} = (u-1)^2\sqrt{u}$ og $g'(x) = 1$, og þar með er

$$f(u) = (u-1)^2\sqrt{u} = (u^2-2u+1)\sqrt{u} = u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}$$

Ef

$$F(u) = \tfrac{2}{7}u^{7/2} - \tfrac{4}{5}u^{5/2} + \tfrac{2}{3}u^{3/2}$$

þá er

$$\int x^2\sqrt{x+1}\, dx = F(g(x)) + C$$

Venjulega eru þessir útreikningar settir fram á samþjöppuðu formi:

$$\int x^2\sqrt{x+1}\, dx = \int (u-1)^2\sqrt{u}\, du$$

(settum $u = x+1$ og þar með $x = u-1$ og $du = dx$)

$$\begin{aligned}
&= \int u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}\, du \\
&= \tfrac{2}{7}u^{7/2} - \tfrac{4}{5}u^{5/2} + \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C \\
&= \tfrac{2}{7}(x+1)^{7/2} - \tfrac{4}{5}(x+1)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C.
\end{aligned}$$

Formúlurnar um heildun með innsetningu gefa okkur eftirfarandi niðurstöðu:

Setning 7.2.3. *Látum f vera samfellt fall á bili J, látum g vera diffranlegt á opnu bili sem inniheldur $[a, b]$ með samfellda afleiðu g á $[a, b]$ og gerum ráð fyrir því að g varpi $[a, b]$ inn í J. Þá er*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

Sönnun. Þar sem $f(g(x)) \cdot g'(x)$ er samfellt fall á $[a, b]$ þá hefur það stofnfall, köllum það $H(x)$. Látum ennfremur $F(x)$ vera stofnfall fyrir $f(x)$. Þá er $H(x) = F(g(x)) + C$ svo að

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx &= H(b) - H(a)\\ &= F(g(b)) - F(g(a))\\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.\end{aligned}$$

□

Verkefni 7.2

Reiknið heildin í dæmum 1-28.

1 $\displaystyle\int 2x(x^2+4)^{\frac{3}{2}}\,dx$

2 $\displaystyle\int \frac{2x^7}{(x^8-1)^2}\,dx$

3 $\displaystyle\int x^3\sqrt{3x-1}\,dx$

4 $\displaystyle\int x(x-1)^{\frac{1}{3}}\,dx$

5 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$

6 $\displaystyle\int \frac{2x^7}{(x^2+4)^{\frac{1}{3}}}\,dx$

7 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\ln x)^n}$

8 $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx$

9 $\displaystyle\int \sin(x-1)^{\frac{1}{4}}\,dx$

10 $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan^3 x}\,dx$

11 $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$

12 $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x}$

13 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-2x-x^2}}$

14 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(x-3)}}$

15 $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

16 $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$

17 $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2-4x+5}$

18 $\displaystyle\int \arcsin x \, dx$

19 $\displaystyle\int \arccos x \, dx$

20 $\displaystyle\int \arctan x \, dx$

21 $\displaystyle\int \operatorname{Arsinh} x \, dx$

22 $\displaystyle\int \operatorname{Arcosh} x \, dx$

23 $\displaystyle\int \operatorname{Artanh} x \, dx$

24 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx$

25 $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}} \, dx$

26 $\displaystyle\int_a^b \frac{x^3}{1-x} \, dx, \; 1 < a < b$

27 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2x^2) \, dx$

28 $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^5 \, dx$

29 Sýnið að heildið

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^\alpha x}$$

sé óháð tölunni α og reiknið út gildi þess.

7.3 Innsetning horna- og breiðbogafalla

Við skulum nú líta á tilfelli þar sem innsetning horna- og breiðbogafalla leiðir til ákvörðunar stofnfalls. Þetta er tilfellið þar sem ákvarða á stofnfall

$$\int f(t) \, dt$$

þar sem $f(t)$ inniheldur liðinn

$$\sqrt{at^2+bt+c}$$

Athugum tilfellið $a = 1$ eða $a = -1$ (almenna tilfellið er svipað og skýrist best með dæmum). Þar sem

$$t^2+bt+c = \left(t+\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

og

$$-t^2 + bt + c = -\left(t - \frac{b}{2}\right)^2 + c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

þá sjáum við með því að setja $x = t + \frac{b}{2}$ eða $x = t - \frac{b}{2}$ að í stað $\sqrt{at^2 + bt + c}$ fáum við lið af einni af eftirfarandi þremur gerðum

$$\sqrt{x^2 + \alpha^2}, \qquad \sqrt{x^2 - \alpha^2}, \qquad \sqrt{\alpha^2 - x^2}$$

Ef við fáum lið af fyrstu gerð þá setjum við $x = \alpha \sinh u$. Þá fæst

$$\sqrt{x^2 + \alpha^2} = \alpha\sqrt{\sinh^2 u + 1} = \alpha\sqrt{\cosh^2 u} = \alpha \cosh u$$

Ef við fáum lið af annarri gerð þá setjum við $x = \alpha \cosh u$ og fáum

$$\sqrt{x^2 - \alpha^2} = \alpha\sqrt{\cosh^2 u - 1} = \alpha\sqrt{\sinh^2 u} = \alpha \sinh u$$

og með lið af þriðju gerð fæst með innsetningunni $x = \alpha \sin u$

$$\sqrt{\alpha^2 - x^2} = \alpha\sqrt{1 - \sin^2 u} = \alpha\sqrt{\cos^2 u} = \alpha \cos u$$

Ef upp kemur liður af fyrstu gerð má líka nota innsetninguna $x = \alpha \tan u$ og ef upp kemur liður af annari gerð má líka nota $x = \alpha \sec u$ og $x = \alpha\cos u$ ef upp kemur liður af þriðju gerð.

Lítum á eitt dæmi:

Dæmi 7.3.1. Reiknið $\int \sqrt{x^2 + 2x + 3}\, dx$.

Úrlausn.

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{x^2 + 2x + 3}\, dx \\ &= \int \sqrt{(x+1)^2 + 2}\, dx \end{aligned}$$

(setjum $y = x + 1$ þá er $dy = dx$)

$$= \int \sqrt{y^2 + 2}\, dy$$

(setjum $y = \sqrt{2}\sinh u$ þá er $dy = \sqrt{2}\cosh u\,du$)

$$
\begin{aligned}
&= 2\int \sqrt{\sinh^2 u + 1}\cosh u\,du \\
&= 2\int \cosh^2 u\,du \\
&= \int (\cosh 2u + 1)\,du \\
&= \frac{\sinh 2u}{2} + u + C \\
&= \sinh u \cosh u + u + C \\
&= \frac{y}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{y^2}{2}} + \operatorname{Arsinh}(y/\sqrt{2}) + C \\
&= \frac{y\sqrt{2 + y^2}}{2} + \operatorname{Arsinh}(y/\sqrt{2}) + C \\
&= \frac{(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3}}{2} + \operatorname{Arsinh}((x+1)/\sqrt{2}) + C.
\end{aligned}
$$

Verkefni 7.3

Reiknið út óákveðnu heildin í dæmum 1-6.

1 $\displaystyle\int \sqrt{3x^2 + 3x + 2}\,dx$

2 $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + 3x + 1}\,dx$

3 $\displaystyle\int \sqrt{5x^2 + 5x + 1}\,dx$

4 $\displaystyle\int \sqrt{-x^2 + 4x - 3}\,dx$

5 $\displaystyle\int \sqrt{-18x^2 - 12x}\,dx$

7.4 Ræð föll og stofnbrot

Rætt fall er fall af gerðinni

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

þar sem p og q eru margliður. Við köllum ræða fallið *eiginlegt* ef stig $p <$ stig q. Sérhvert rætt fall r má rita sem

$$r(x) = p_1(x) + \frac{p_2(x)}{q(x)}$$

þar sem p_1,p_2 og q eru margliður og p_2/q er eiginlegt rætt fall.

Dæmi 7.4.1. Ritið ræða fallið

$$r(x) = \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 + 2x + 2}$$

sem summu af margliðu og eiginlegu ræðu falli.

Úrlausn. Við deilum nefnara upp í teljara:

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
\multicolumn{1}{r}{} & x & - & 1 & & & & \\ \cline{2-8}
x^2 + 2x + 2 & x^3 & + & x^2 & + & x & - & 1 \\
\multicolumn{1}{r}{} & x^3 & + & 2x^2 & + & 2x & & \\ \cline{2-8}
\multicolumn{1}{r}{} & & & -x^2 & - & x & - & 1 \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & -x^2 & - & 2x & - & 2 \\ \cline{4-8}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & & x & + & 1
\end{array}$$

svo að

$$r(x) = (x - 1) + \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}.$$

Við vitum að sérhverja margliðu $q(x)$ má rita sem

$$\begin{aligned} q(x) = c(x - a_1)^{n_1} \cdots (x - a_k)^{n_k} \\ \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{m_1} \cdots (x^2 + b_l x + c_l)^{m_l}. \end{aligned}$$

þar sem annars stigs liðirnir $x^2 + b_i x + c_i$ hafa engar rauntölurætur. Með því að nota þessa niðurstöðu er hægt að sýna fram á að sérhvert eiginlegt rætt fall megi rita sem summu liða af gerðinni

$$\frac{A}{(x - a)^i}$$

og liða af gerðinni

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^j}.$$

Ræð föll af þessum gerðum kallast *stofnbrot*. Nú er tiltölulega einfalt að finna stofnföll stofnbrota. Til að finna stofnföll eiginlegra ræðra falla liðum við því ræðu föllin í stofnbrot. Við sýnum nokkur dæmigerð tilfelli.

Dæmi 7.4.2. Finnið $\displaystyle\int \frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}\,dx.$

Úrlausn. Ræða fallið er eiginlegt svo að við getum strax byrjað á að leysa nefnarann upp í þætti

$$\begin{aligned} x^3+x^2-2x &= x(x^2+x-2) \\ &= x(x-1)(x+2). \end{aligned}$$

Hver liður kemur fyrir í fyrsta veldi svo að við getum ritað ræða fallið sem:

$$\frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}.$$

Ef hægri hlið er sett á eitt brotastrik fæst:

$$\frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x^3+x^2-2x}.$$

Til að vinstri og hægri hlið séu eins nægir að teljarar báðum megin séu eins:

$$4x^2-3x-4 = A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1).$$

Röðum hægri hlið eftir veldum af x og berum saman stuðla:

$$4x^2-3x-4 = (A+B+C)x^2+(A+2B-C)x+(-2A).$$

Að stuðlar séu eins báðum megin jafngildir því að:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 4 \\ A+2B-C &= -3 \\ -2A &= -4. \end{aligned}$$

Sem gefur: $A=2$, $B=-1$ og $C=3$.

Önnur aðferð til að ákvarða stuðlana A, B og C er að setja inn gildi fyrir x sem gefa einfaldar jöfnur (hentar sér í lagi vel ef nefnari þáttast í mismunandi línulega þætti).

$$4x^2-3x-4 = A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1).$$

Setjum $x = 0$ inn báðum megin: $-4 = -2A$ svo að $A = 2$. Setjum $x = 1$ inn báðum megin: $-3 = 3B$ svo að $B = -1$. Setjum $x = -2$ inn báðum megin: $18 = 6C$ svo að $C = 3$. Við getum nú ákvarðað stofnfallið.

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2 - 3x - 4}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx &= \int (\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+2})\,dx \\ &= 2\ln|x| - \ln|x-1| + 3\ln|x+2| + C \\ &= \ln\left|\frac{x^2(x+2)^3}{x-1}\right| + C.\end{aligned}$$

Í næsta dæmi kemur fyrir í nefnara 1. stigs liður í hærra veldi en 1.

Dæmi 7.4.3. Finnið $\displaystyle\int \frac{x^3 - 4x - 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}\,dx.$

Úrlausn. Við byrjum á því að þátta nefnarann:

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = x(x-1)^3.$$

Ræða fallið má þá liða í stofnbrotin:

$$\frac{x^3 - 4x - 1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

svo við fáum

$$\frac{x^3 - 4x - 1}{x(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx}{x(x-1)^3}.$$

Röðum eftir veldum á x og berum saman teljara báðum megin:

$$x^3 - 4x - 1 = (A + B)x^3 + (-3A - 2B + C)x^2 + (3A + B - C + D)x - A.$$

Berum saman stuðla:

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ -3A - 2B + C &= 0 \\ 3A + B - C + D &= -4 \\ -A &= -1. \end{aligned}$$

Lausnir á þessu jöfnuhneppi eru:

$$A = 1 \quad B = 0 \quad C = 3 \quad D = -4.$$

Þar með er

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-4x-1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{4}{(x-1)^3}\right)dx\\ &= \ln|x| - \frac{3}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+C.\end{aligned}$$

Við skulum nú líta á dæmi þar sem fyrir kemur óþættanlegur 2. stigs liður.

Dæmi 7.4.4. Finnið $\displaystyle\int \frac{x^7+x^3+1}{x^4+1}\,dx.$

Úrlausn. Við byrjum á því að rita fallið undir heildismerkinu sem summu af margliðu og eiginlegu ræðu falli.

$$\frac{x^7+x^3+1}{x^4+1} = \frac{x^3(x^4+1)+1}{x^4+1} = x^3 + \frac{1}{x^4+1}.$$

Það er einfalt að ákvarða stofnfall fyrri liðarins en örðugra að finna stofnfall þess síðari. Við viljum þátta x^4+1. Jafnan

$$x^4+1=0$$

hefur fjórar tvinntalnarætur $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}$ svo að

$$\begin{aligned}x^4+1 &= \left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &\quad\cdot\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \left((x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}\right)\left((x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}\right)\\ &= (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1).\end{aligned}$$

Við ritum því

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}.$$

Setjum upp á eitt brotastrik hægra megin og berum saman liði:

$$1 = (Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

Röðum eftir veldum af x :

$$\begin{aligned}1 &= x^3(A+C) + x^2(\sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D)\\ &\quad + x(A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D) + (B+D).\end{aligned}$$

Berum saman stuðla báðum megin:

$$\begin{aligned}A + C &= 0\\ \sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D &= 0\\ A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D &= 0\\ B + D &= 1.\end{aligned}$$

Lausnirnar eru:

$$A = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \quad C = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad B = D = \frac{1}{2}$$

svo að

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \int \frac{-\sqrt{2}x+2}{4(x^2-\sqrt{2}x+1)}\,dx + \int \frac{\sqrt{2}x+2}{4(x^2+\sqrt{2}x+1)}\,dx.$$

Lítum á fyrri liðinn hægra megin. Við skrifum hann sem summu tveggja liða þar sem fyrri liðurinn er þannig að teljari er afleiða nefnara.

$$\int \frac{-\sqrt{2}x+2}{4(x^2-\sqrt{2}x+1)}\,dx = A\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + B\int \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx.$$

Þá verður að gilda $A = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$ og $B = \frac{1}{4}$.

$$\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx = \ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right| + C$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx &= \int \frac{1}{(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}\,dx\\ &= 2\int \frac{1}{(\sqrt{2}x-1)^2+1}\,dx\\ &= \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x-1) + C.\end{aligned}$$

Þar með er

$$\int \frac{-\sqrt{2}x+2}{4(x^2-\sqrt{2}x+1)}\,dx = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C. \qquad (1)$$

Á samsvarandi hátt fæst að

$$\int \frac{\sqrt{2}x+2}{4(x^2+\sqrt{2}x+1)}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1)+C \qquad (2)$$

Útkoman úr dæminu fæst nú með því að leggja saman $\frac{1}{4}x^4$ og hægri hliðarnar í (1) og (2).

Athugasemd. Ef finna á stofnfallið

$$\int \frac{ex+f}{ax^2+bx+c}\,dx$$

þar sem nefnarinn er óþættanleg margliða af 2. stigi þá beitum við sams konar aðferð og hér að ofan. Við skrifum

$$\int \frac{ex+f}{ax^2+bx+c}\,dx = A\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$$

Fyrri liðurinn hægra megin er lygri vegna þess að teljari er diffurkvóti nefnara, en seinni liðurinn er arctan-liður.

Verkefni 7.4

Reiknið óákveðnu heildin í dæmum 1-13.

1 $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+3}$

2 $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x-3}$

3 $\displaystyle\int \frac{dx}{9-x^2}$

4 $\displaystyle\int \frac{dx}{1-8x+16x^2}$

5 $\displaystyle\int \frac{2x^2\,dx}{x^2+x-2}$

6 $\displaystyle\int \frac{(x^3+2x+1)\,dx}{x^2+3x+2}$

7 $\displaystyle\int \frac{dx}{2+6x+9x^2}$

8 $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^3-1}$

9 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

10 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

11 $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2-1)(x^2-4)}\,dx$

12 $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+1}\,dx$

13 $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}-4e^x+4}$

7.5 Heildi sem breyta má í heildi ræðra falla, innsetningin $\mathbf{u = tan\,\frac{x}{2}}$

Stofnfalli af gerðinni

$$\int \frac{\sum a_{ij}\cos^i x\cdot\sin^j x}{\sum b_{ij}\cos^i x\cdot\sin^j x}\,dx$$

má breyta í stofnfall af gerðinni

$$\int r(u)\,du$$

þar sem r er rætt fall með innsetningunni

$$u=\tan\tfrac{1}{2}x.$$

Dæmi 7.5.1. Finnið $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx.$

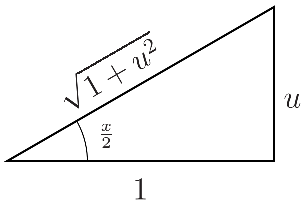
Úrlausn. Setjum $u=\tan\frac{1}{2}x$, þá er $x=2\arctan u$ og $dx=\frac{2du}{1+u^2}$. Ennfremur þá er

$$\sin\tfrac{x}{2}=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

og

$$\cos\tfrac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

og þar með er



Mynd 7.1:

$$\cos x = \cos^2 \tfrac{x}{2} - \sin^2 \tfrac{x}{2} = \frac{1}{1+u^2} - \frac{u^2}{1+u^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Þannig fæst að

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}\,dx &= \int \frac{1+u^2}{1-u^2} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du \\ &= \int \frac{2}{1-u^2}\,du \\ &= \int \Big(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\Big)\,du \\ &= \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C \\ &= \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + C \\ &= \ln|\sec x + \tan x| + C.\end{aligned}$$

Við skulum taka eitt dæmi þar sem beita þarf fleiri en einni innsetningu.

Dæmi 7.5.2. Finnið $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\,dx.$

Úrlausn.

$$\begin{aligned}&\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\,dx \\ &\qquad = \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}}{\frac{3}{2}\sin t} \cdot \tfrac{3}{2}\cos t\,dt\end{aligned}$$

(settum $x = \frac{3}{2}\sin t$ svo að $dx = \frac{3}{2}\cos t$)

$$
\begin{aligned}
&= 3\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}\,dt \\
&= 3\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\,dt \\
&= 3\int \frac{1}{\sin t}\,dt - 3\int \sin t\,dt \\
&= 3\int \frac{1}{\cos(t-\frac{\pi}{2})}\,dt + 3\cos t \\
&= 3\ln\left|\frac{1+\tan(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4})}{1-\tan(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4})}\right| + 3\cos t + C \\
&= 3\ln\left|\sec(t-\frac{\pi}{2}) + \tan(t-\frac{\pi}{2})\right| + 3\cos t + C \\
&= 3\ln\left|\frac{1}{\sin t} - \cot t\right| + 3\cos t + C \\
&= 3\ln\left|\frac{1-\cos t}{\sin t}\right| + 3\cos t + C \\
&= 3\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}\right| + 3\sqrt{1-\sin^2 t} + C \\
&= 3\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-(\frac{2}{3}x)^2}}{\frac{2}{3}x}\right| + 3\sqrt{1-(\frac{2}{3}x)^2} + C \\
&= 3\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right| + \sqrt{9-4x^2} + C.
\end{aligned}
$$

Verkefni 7.5

Reiknið óákveðnu heildin í dæmum 1-12.

1 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

2 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

3 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

4 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

5 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + \sin x}$

6 $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \alpha \cos x}, \ 0 < \alpha < 1$

7 $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \alpha \cos x}, \ \alpha > 1$

8 $\displaystyle\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$

9 $\displaystyle\int \frac{dx}{4 + 2 \cos x}$

10 $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin x + 2 \cos x)^2}$

11 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3 - x^2}}{x}\, dx$

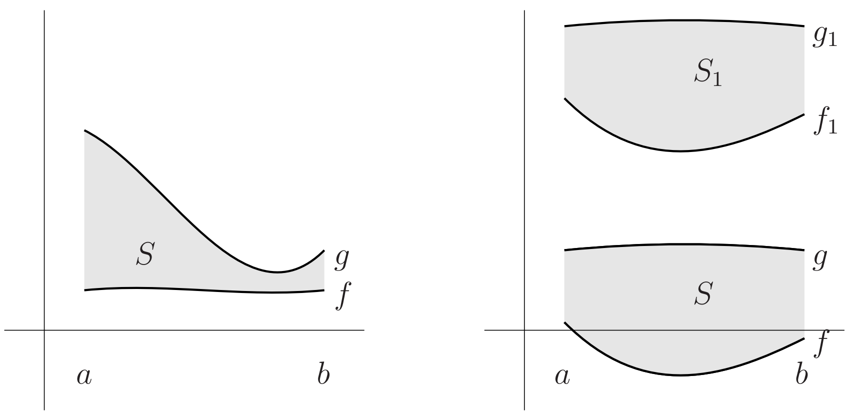
12 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x}\, dx$

7.6 Heildi og flatarmál

Flatarmál svæðis milli tveggja ferla má finna með heildun.

Látum f og g vera takmörkuð föll á bili [a,b] með $f(x) \leq g(x)$ fyrir öll x á [a,b]. Svæðið milli fallrita f og g er mengið

$$S = \{(x, y) : x \in [a, b] \quad og \quad f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$



Mynd 7.2: Flatarmál svæðis milli tveggja fallrita

Setning 7.6.1. *Ef f og g eru heildanleg á [a,b] og ef $f \leq g$ þá er svæðið S milli fallritanna mælanlegt og*

$$\mathrm{a}(S) = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx.$$

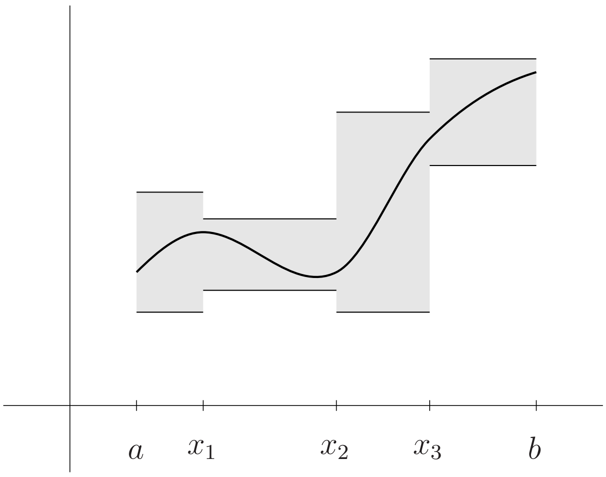
Áður en við sönnum þessa setningu þurfum við að sýna fram á að fallrit heildanlegs falls sé mælanlegt mengi og hafi flatarmál 0.

Setning 7.6.2. *Látum f vera heildanlegt fall á [a,b]. Þá er mengið*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

mælanlegt og $\mathrm{a}(\Gamma_f) = 0$.

Sönnun. Látum $\varepsilon > 0$ og veljum skiptingu P á [a,b] og undir- og yfirsummur U og Y sem svara til P þannig að $Y - U < \varepsilon$.



Mynd 7.3: Flatarmál Γ_f

Ef

$$U = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{og} \quad Y = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

þá lítum við á marghyrninginn

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$$

þar sem R_i er rétthyrningurinn

$$R_i = \{(x, y) : x \in [x_{i-1}, x_i] \quad \mathit{og} \quad m_i \le y \le M_i\}.$$

Þá er ljóst að $\Gamma_f \subseteq R$ og að

$$\mathrm{a}(R) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{a}(R_i) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = Y - U < \varepsilon.$$

Af þessu leiðir að Γ_f er mælanlegt mengi og $\mathrm{a}(\Gamma_f) = 0$. □

Sönnun á setningu 7.6.1. Athugum fyrst tilfellið þar sem $f \geq 0$. Látum D_1 og D_2 tákna svæðið milli ferils f og x-áss annars vegar og milli ferils g og x-áss hins vegar. Samkvæmt setningu 5.2.6 þá eru D_1 og D_2 mælanleg. En þá er $D_2 \setminus D_1$ líka mælanlegt og þar með er $S = (D_2 \setminus D_1) \bigcup \Gamma_f$ mælanlegt og

$$\begin{aligned}
\mathrm{a}(S) &= \mathrm{a}(D_2 \setminus D_1) + \mathrm{a}(\Gamma_f) \\
&= \mathrm{a}(D_2 \setminus D_1) \\
&= \mathrm{a}(D_2) - \mathrm{a}(D_1) \\
&= \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \\
&= \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx.
\end{aligned}$$

Ef ekki gildir að $f \geq 0$ þá veljum við fasta c þannig að $f + c \geq 0$ og setjum $f_1 = f + c$ og $g_1 = g + c$. Einnig látum við

$$S_1 = \{(x, y) : x \in [a, b] \quad og \quad f_1(x) \leq y \leq g_1(x)\}$$

Þá er S_1 mælanlegt og

$$\begin{aligned}
\mathrm{a}(S_1) &= \int_a^b (g_1(x) - f_1(x))\,dx \\
&= \int_a^b (g(x) + c - (f(x) + c))\,dx \\
&= \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx.
\end{aligned}$$

Þar sem S er eins og S_1 (sjá mynd 7.2), þá er S mælanlegt og $\mathrm{a}(S) = \mathrm{a}(S_1)$. □

Verkefni 7.6

Finnið flatarmál svæðanna í dæmum 1-5.

1 $\{(x,y) : \frac{1}{2}x^2 + 1 \leq y \leq 3 + x\}$

2 $\{(x,y) : 1 + x \leq y \leq \sqrt{5x}\}$

3 $\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, x - 2 \leq y \leq x^3 - x\}$

4 $\{(x,y) : 4 - 10x^2 \leq y \leq 2 - 2x^2, 1 - x^2 \leq y \leq 2 - 2x^2\}$

5 $\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, \sin^3 x \leq y \leq 1 + e^x\}$

6 Sannreynið formúluna

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Með öðrum orðum, gangið úr skugga um að heildið sé jafnt hálfu flatarmáli einingarhringskífunnar.

7 Reiknið heildið

$$2\int_{a-r}^{a+r} \sqrt{r^2 - (x-a)^2}dx.$$

8 Finnið einfalda formúlu fyrir flatarmáli sporbaugs, þ.e.a.s mengis af gerðinni $\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, þar sem $a > 0$ og $b > 0$. Athugið hvort formúlan er rétt þegar $a = b = r$.

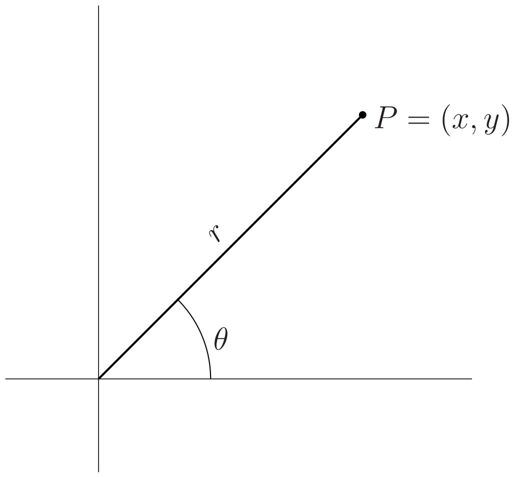
9 Látum M vera mengið $\{(s,t) : 0 < s < 2, 0 < t < 2\}$. Sýnið að mengið

$$\left\{\int_0^2 (1 - \cos(\frac{x-s}{t}))dx : (s,t) \in M\right\}$$

hafi neðra mark og ákvarðið það.

7.7 Flatarmálsreikningar í skauthnitum

Staðsetningu punkts í hnitaplaninu er hægt að lýsa með svonefndum *skauthnitum.* Punkturinn $P = (x, y)$ hefur skauthnitin (r, θ) þar sem $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ er fjarlægð P frá upphafspunkti og θ er hornið milli jákvæða hluta x-áss og hálflínunnar frá upphafspunkti gegnum P reiknað öfugt við gang vísanna á klukkunni. Hér er því um að ræða skauthnit tvinntölunnar $x + iy$.



Mynd 7.4:

Sumum ferlum er hægt að lýsa með einföldum jöfnum í skauthnitum. Raunar höfum við ekki skilgreint hugtakið *ferill* nákvæmlega. Lauslega sagt þá er ferill braut í planinu. Dæmi um feril er Γ_f, fallrit falls f sem er skilgreint á bili I,

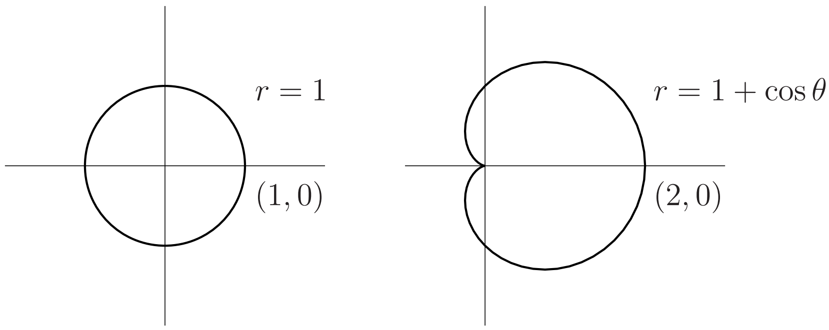
$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in I\}$$

En það getur þurft fleiri en eitt fall til að lýsa ferli. Ef $g(x, y)$ er fall af tveimur breytistærðum þá segjum við að jafnan $g(x, y)$ lýsi ferlinum

$$\gamma = \{(x, y) : g(x, y) = 0\},$$

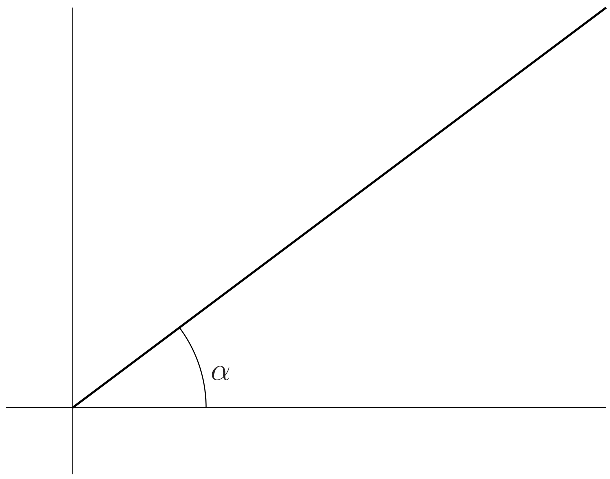
ef um sérhvern punkt $(x_0, y_0) \in \gamma$ gildir eftirfarandi: Annaðhvort er hægt að finna fall ϕ skilgreint á bili I sem inniheldur x_0 þannig að ef $x \in I$ þá er $g(x, y) = 0$ þá og því aðeins að $y = \phi(x)$, eða þá hægt er að finna fall ϕ skilgreint á bili I sem inniheldur y_0 þannig að ef $y \in I$ þá er $g(x, y) = 0$ þá og því aðeins að $x = \phi(y)$. Sem dæmi getum við tekið einingarhringinn sem lýst er með jöfnunni $x^2 + y^2 = 1$. Við setjum $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Fallið $\phi_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ gefur þá efri hluta hringsins en $\phi_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ gefur neðri hlutann.

Í skauthnitum hefur einingarhringurinn jöfnuna $r = 1$. Jafnan $r = 1 + \cos\theta$ lýsir svokölluðum *hjörtungi*.



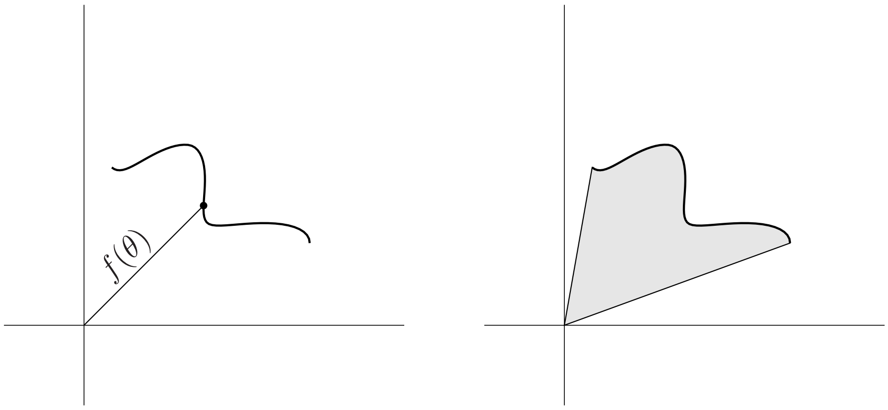
Mynd 7.5: Hringur og Hjörtungur

Það er einfalt að lýsa hálflínum í skauthnitum, $\theta = \alpha$ er jafna hálflínunnar gegnum 0 með stefnuhornið α.



Mynd 7.6: Hálflína í skauthnitum

Ef $[\alpha, \beta] \subseteq [0, 2\pi]$ og $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_+$ er fall, þá getum við litið á mengi þeirra punkta í planinu sem hafa skauthnit $(f(\theta), \theta)$. Þá kemur fram ferill sem gefinn er með jöfnunni $r = f(\theta)$:



Mynd 7.7:

Ferillinn ásamt hálflínunum $\theta = \alpha$ og $\theta = \beta$ afmarka skika í planinu. Við ætlum að finna aðferð til að ákvarða flatarmál slíkra skika.

Setning 7.7.1. *Látum $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_+$ vera samfellt fall, þar sem $\beta - \alpha \le 2\pi$. Þá er skikinn S sem afmarkast af ferlinum $r = f(\theta)$ og hálflínunum $\theta = \alpha$ og $\theta = \beta$ mælanlegur og flatarmál hans er*

$$\mathrm{a}(S) = \tfrac{1}{2} \int_\alpha^\beta f^2(\theta)\, d\theta$$

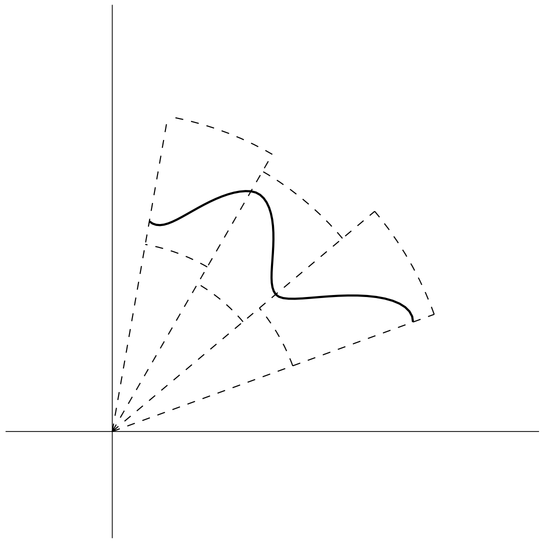
Sönnun. Fallið f^2 er samfellt og því heildanlegt á $[\alpha, \beta]$. Fyrir gefið $\varepsilon > 0$ getum við valið skiptingu P og yfir- og undirsummur Y og U fyrir f^2 sem svarar til til P þannig að $Y - U < \varepsilon$. Segjum að

$$U = \sum_{i=1}^n m_i(\theta_i - \theta_{i-1}) \quad \text{og} \quad Y = \sum_{i=1}^n M_i(\theta_i - \theta_{i-1})$$

þar sem

$$m_i \le f^2(\theta) \le M_i \qquad \text{ef} \quad \theta_{i-1} \le \theta \le \theta_i.$$

Þar eð $f^2(\theta) \ge 0$ þá er $M_i \ge 0$ fyrir öll i. Ef $m_i < 0$ fyrir eitt eða fleiri i þá setjum við 0 í stað þeirra. Þá gildir áfram að $m_i \le f^2(\theta)$ ef $\theta \in (\theta_{i-1}, \theta_i)$, svo að við erum komin með nýja undirsummu U' og $U \le U' \le Y$. Við skulum því gera ráð fyrir því að $m_i \ge 0$ fyrir öll i í upphaflegu undirsummunni. Látum nú $r_i = \sqrt{m_i}$ og $R_i = \sqrt{M_i}$.



Mynd 7.8:

Skikinn S_U, sammengi geiranna með radíusa r_i, er mælanlegt mengi og flatarmál hans er

$$a(S_U) = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} r_i^2(\theta_i - \theta_{i-1}) = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i(\theta_i - \theta_{i-1}) = \tfrac{1}{2} U.$$

Á tilsvarandi hátt sést að skikinn S_Y sem er sammengi geiranna með radíusa R_i, er mælanlegt mengi og

$$a(S_Y) = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} R_i^2(\theta_i - \theta_{i-1}).$$

Ennfremur þá er

$$S_U \subseteq S \subseteq S_Y.$$

Nú er

$$a(S_Y) - a(S_U) = \tfrac{1}{2}(Y - U) < \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{1}$$

og ε getur verið hvaða jákvæða tala sem er. Við sjáum því að skikinn S er mælanlegur og

$$a(S_U) \leq a(S) \leq a(S_Y). \tag{2}$$

En nú eru Y og U yfir-og undirsummur fyrir f^2 svo að

$$U \leq \int_\alpha^\beta f^2(\theta)\, d\theta \leq Y,$$

og þar með er

$$\mathrm{a}(S_U) \leq \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\, d\theta \leq \mathrm{a}(S_Y). \tag{3}$$

Af (1),(2) og (3) leiðir að

$$\left|\mathrm{a}(S) - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\, d\theta\right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

En ε getur verið hvaða tala sem er svo að

$$\mathrm{a}(S) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\, d\theta.$$

□

Dæmi 7.7.2. Finnum flatarmál hjörtungsins S á mynd 7.5 hér að framan, sem gefinn er með jöfnunni $r = 1 + \cos\theta$.

Úrlausn.

$$\begin{aligned}
\mathrm{a}(S) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f^2(\theta)\, d\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2\, d\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\, d\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2\theta)\, d\theta\\
&= \left[\tfrac{3}{4}\theta + \sin\theta + \tfrac{1}{8}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}\\
&= \tfrac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

Verkefni 7.7

Teiknið svæðin í dæmum 1-6 og reiknið flatarmál þeirra:

1 $0 \le r \le \sin 3\theta$;
$0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$

2 $0 \le r \le 2(1 + \sin\theta)$;
$0 \le \theta \le 2\pi$

3 $0 \le r \le \theta$;
$0 \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$

4 $0 \le r \le \theta \cos\theta^3$;
$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

5 $0 \le r \le 4 + \sin\theta$;
$0 \le \theta \le 2\pi$

6 $0 \le r \le \theta + \sin 4\theta$;
$\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

Teiknið og finnið flatarmál svæðanna milli ferlanna í dæmum 7-10.

7 $r = \cos\theta$
$r = \sqrt{3}\sin\theta$

8 $r = 3$
$r = 2(1 + \cos\theta)$

9 $r = 3\cos\theta$
$r = 1 + \cos\theta$

10 $r = 1$
$r = 1 + \cos\theta$

7.8 Rúmmál

Rúmmál fjölmargra stykkja (rúmhluta) er fundið með því að skipta stykkinu í einfaldari stykki eins og t.d. teninga eða fjórflötunga (brístrenda pýramíta). Þannig fæst safn stykkja sem finna má rúmmál á.

Við göngum út frá því að hægt sé að stækka þetta safn einfaldra stykkja í safn $\mathcal{A}$ af hlutmengjum í rúminu og sérhverju S í $\mathcal{A}$ sé úthlutuð tala, sem er táknuð $\mathrm{v}(S)$ og kölluð *rúmmál* stykkisins S, þannig að eftirfarandi fullyrðingar séu sannar.

(i) Ef S er í $\mathcal{A}$ þá er $\mathrm{v}(S) \ge 0$.

(ii) Ef S og T eru í $\mathcal{A}$ þá eru $S \cup T$ og $S \cap T$ í $\mathcal{A}$ og $\mathrm{v}(S \cup T) = \mathrm{v}(S) + \mathrm{v}(T) - \mathrm{v}(S \cap T)$.

(iii) Ef S og T eru í $\mathcal{A}$ og $S \subseteq T$ þá er $T \setminus S$ í $\mathcal{A}$ og $\mathrm{v}(T \setminus S) = \mathrm{v}(T) - \mathrm{v}(S)$, og ef S er í $\mathcal{A}$ og T er eins og S þá er T í $\mathcal{A}$ og $v(T) = v(S)$.

Nú kemur nýtt atriði, lögmál Cavalieris. Það er mun almennara en reglan sem segir að eins svæði hafi sama flatarmál. Látum S vera stykki og L vera línu. Ef M er plan hornrétt á L þá er sniðmengið $M \cap S$ kallað *þversnið hornrétt* á L. Þversniðið $M \cap S$ er svæði í plani og við getum því athugað hvort $M \cap S$ sé mælanlegt. Ef sérhvert þversnið hornrétt á L er mælanlegt þá kallast S *Cavalieri-stykki.*

(iv) Lögmál Cavalieris. *Ef S og T eru tvö Cavalieri-stykki í $\mathcal{A}$, ef L er gefin lína og ef* $\mathrm{a}(M \cap S) \le \mathrm{a}(M \cap T)$ *fyrir sérhvert plan M*

hornrétt á L þá er $\mathrm{v}(S) \leq \mathrm{v}(T)$. *Sérstaklega er því* $\mathrm{v}(S) = \mathrm{v}(T)$ *ef* $\mathrm{a}(M \cap S) = \mathrm{a}(M \cap T)$ *fyrir sérhvert plan M hornrétt á L.*

(v) *Sérhver rétthyrndur kassi er í $\mathcal{A}$ og rúmmál hans er margfeldi kantlengda.*

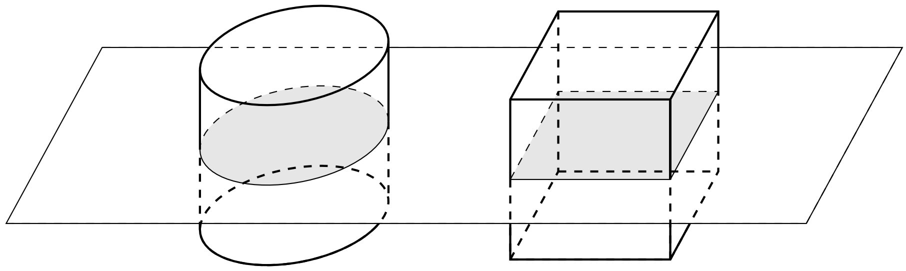
Köllum stykki S kúpt *ef það fullnægir eftirfarandi skilyrði: Ef P_1 og P_2 eru tveir punktar í S þá er allt línustrikið $[P_1, P_2]$ hlutmengi af S. (Svæði í planinu sem fullnægja þessu skilyrði eru líka sögð vera kúpt). Sem dæmi um kúpt stykki má taka kúlur eða kassa. Dæmi um stykki sem er ekki kúpt er t.d. bílslanga.*

(vi) *Kúpt stykki eru í $\mathcal{A}$.*

(vii) *Ef S er stykki með þeim eiginleika að fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til T í $\mathcal{A}$ þannig að $S \subseteq T$ og* $\mathrm{v}(T) < \varepsilon$ *þá er S í $\mathcal{A}$ og* $\mathrm{v}(S) = 0$.

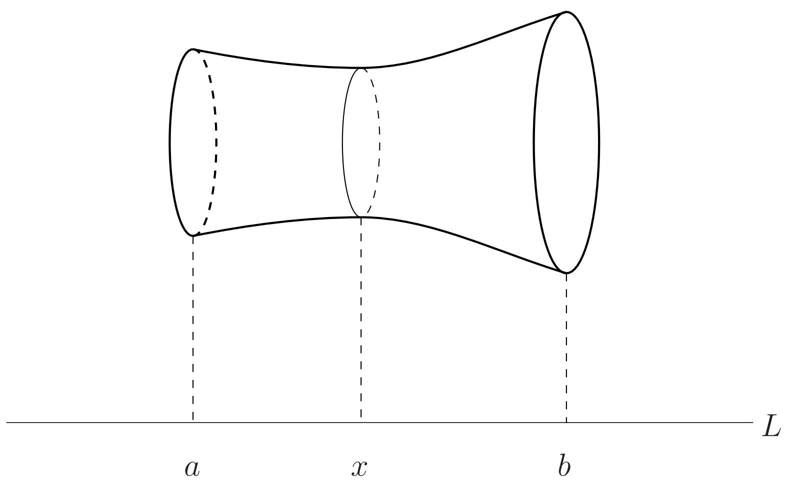
(viii) *Ef S er stykki með þeim eiginleika að fyrir sérhvert $\epsilon > 0$ eru til R og T í $\mathcal{A}$ þannig að $R \subseteq S \subseteq T$ og $v(T \setminus R) < \epsilon$ þá er S í $\mathcal{A}$.*

Þar sem reglulegir sívalningar eru kúptir þá eru þeir í $\mathcal{A}$ og samkvæmt lögmáli Cavalieris þá er rúmmál þeirra flatarmál botnflatar margfaldað með hæð. Til að sýna fram á að svo sé veljum við kassa af sömu hæð og sívalningurinn og með botn sem hefur sama flatarmál og botn sívalningsins. Ef tekið er plan M samsíða botnflötunum þá hafa þversnið sívalningsins og kassans sama flatarmál.



Mynd 7.9: Cavalieristykki

Næst skulum við líta á Cavalieri-stykki S í $\mathcal{A}$ og línu L. Hugsum okkur að merktur sé núllpunktur á L og að gefin sé stefna á L. Veljum punkta a og b á L með $a < b$ þannig að plan hornrétt á L sníði ekki S ef það sker línuna utan bilsins. Fyrir sérhvert x á bilinu $[a, b]$ setjum við $f(x) = \mathrm{a}(S \cap M)$ *þar sem M er plan hornrétt á L gegnum x. Þá gildir, að ef a er heildanlegt*



Mynd 7.10:

fall á bilinu $[a, b]$ *þá er*

$$v(S) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Þetta má sjá á eftirfarandi hátt. Látum $\varepsilon > 0$ *vera gefið og veljum skiptingu* P *á* $[a, b]$ *og undir-og yfirsummur* U *og* Y *fyrir* f *þannig að* $Y - U < \varepsilon$. *Ef*

$$U = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad og \quad Y = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

þá lítum við á stykkin R_1 *og* R_2 *sem fást með því að skeyta saman sívalningunum* S_i^1 *og* S_i^2 *með botnflatarmál* m_i *og* M_i *og hæð* $x_i - x_{i-1}$. R_1 *og* R_2 *eru þá stykki eins og sýnd eru á myndinni. Samkvæmt lögmáli Cavalieris þá er*

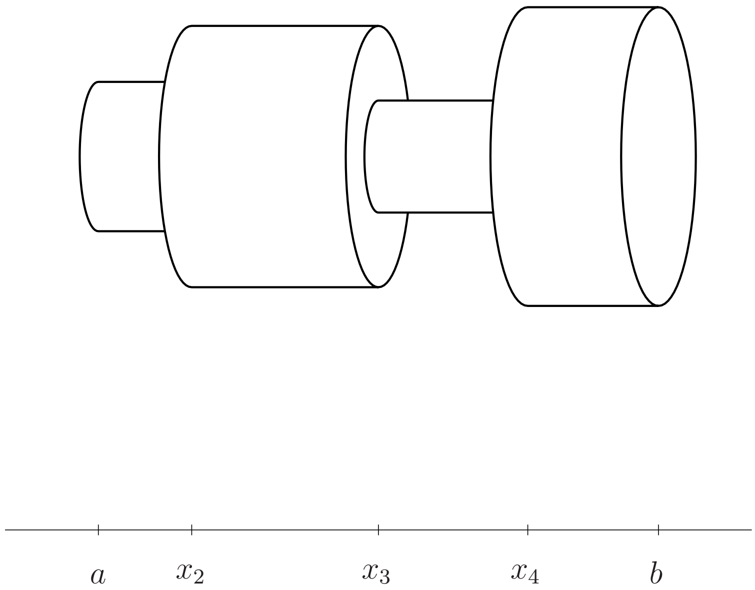
$$v(R_1) \le v(S) \le v(R_2).$$

En

$$v(R_1) = \sum_{i=1}^{n} v(S_i^1) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = U$$

og

$$v(R_2) = \sum_{i=1}^{n} v(S_i^2) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = Y$$



Mynd 7.11:

svo að

$$U \leq \mathrm{v}(S) \leq Y.$$

Þar sem

$$U \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq Y$$

og þar sem $Y - U < \varepsilon$ *þá er*

$$\left| \mathrm{v}(S) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Töluna ε *má taka eins litla og vera skal og við ályktum að*

$$\mathrm{v}(S) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Þessa aðferð má nota til að finna rúmmál snúðstykkja . *Látum* f *vera jákvætt fall á bili* $[a, b]$. *Við snúum menginu*

$$D = \{(x, y) : x \in [a, b] \quad og \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

um x-ásinn. Þá kemur fram svokallað snúðstykki S. *Ef við sníðum S með plani M hornrétt á x-ás þá er* $\mathrm{a}(M \cap S) = \pi f^2(x)$ *ef M sker x-ásinn í x og $a \leq x \leq b$. Annars er* $\mathrm{a}(M \cap S) = 0$. *Samkvæmt niðurstöðunni hér á undan fæst að ef S er í $\mathcal{A}$ og f er heildanlegt á $[a, b]$ þá er*

$$\mathrm{v}(S) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

(Raunar er einfalt að sýna að ef f er heildanlegt þá er S í $\mathcal{A}$). Á svipaðan hátt má sýna fram á að ef $0 \leq f \leq g$ á $[a, b]$ og ef S er snúðstykkið sem fram kemur þegar svæðinu milli fallrita f og g og línanna $x = a$ og $x = b$ er snúið um x-ás þá er

$$\mathrm{v}(S) = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x))\, dx$$

ef S er í $\mathcal{A}$ og ef f og g eru heildanleg.

Til að finna rúmmál stykkja sem fást með því að snúa svæðum í planinu af tiltekinni gerð um y-ás notum við aðra reglu.

Látum f vera samfellt fall, skilgreint á bili $[a, b]$ þar sem $0 \leq a < b$ og $f \geq 0$. Látum síðan S vera stykkið sem fæst þegar svæðinu

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b \quad og \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

er snúið um y-ásinn. Stykkið S er þá í $\mathcal{A}$ og

$$\mathrm{v}(S) = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

Sýnum að þessi formúla sé rétt ef gengið er útfrá að $S \in \mathcal{A}$.

Athugum skiptingu P á $[a, b]$:

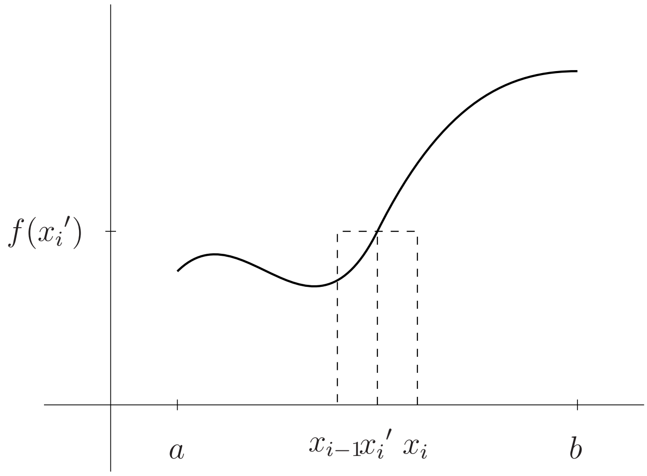
$$a = x_0 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b.$$

Látum x_i' vera miðpunkt bilsins $[x_{i-1}, x_i]$. Þá er

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} x_i' f(x_i')(x_i - x_{i-1})$$

meðalsumma fyrir

$$2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$



Mynd 7.12:

Þegar rétthyrningnum með grunn $[x_{i-1}, x_i]$ *er snúið um* y*-ás kemur fram hólkur (sjá mynd* (7.13)*).*

Rúmmál hólksins er

$$\begin{aligned}\pi x_i^2 f(x_i') - \pi x_{i-1}^2 f(x_i') &= 2\pi f(x_i')\frac{x_i + x_{i+1}}{2}(x_i - x_{i-1}) \\ &= 2\pi f(x_i')x_i'(x_i - x_{i-1}).\end{aligned}$$

Sammengi hólkanna (þeir raðast hver inn í annan) er stykki sem hefur rúmmál sem víkur ekki langt frá rúmmáli stykkisins S *. En rúmmál sammengis hólkanna er einmitt*

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} x_i' f(x_i')(x_i - x_{i-1})$$

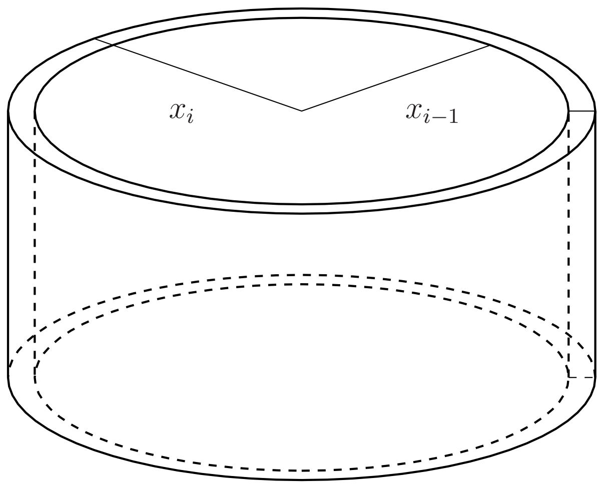
sem er meðalsumman fyrir

$$2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

sem við skrifuðum niður hér að framan.

Enn almennari reglu má fá ef tekin eru tvö samfelld föll f *og* g *á* $[a, b]$ *með* $g \leq f$*. Ef svæðið* S*, sem fæst með því að snúa svæðinu*

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b \quad og \quad g(x) \leq y \leq f(x)\}$$



Mynd 7.13: Hólkur

um y-ás, er í $\mathcal{A}$ þá er

$$\mathrm{v}(S) = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))\,dx.$$

Það er hægt að sýna að þessi formúla sé rétt á svipaðan hátt og gert var með fyrri formúluna.

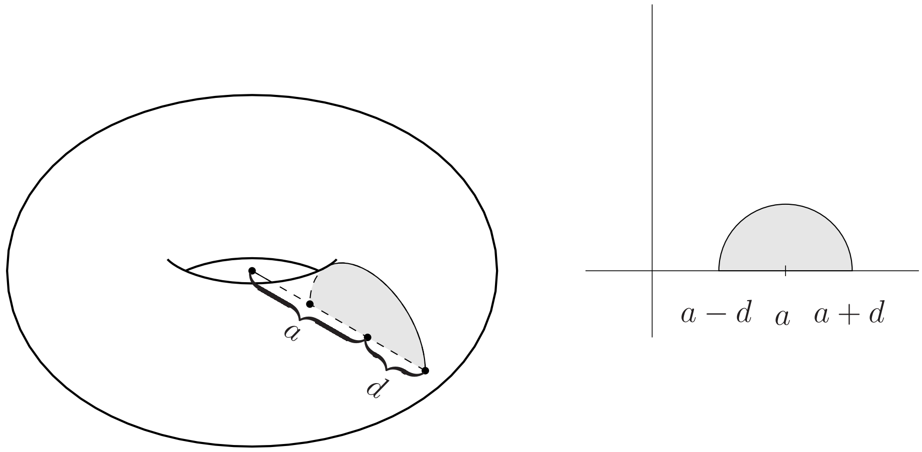
Dæmi 7.8.1. Finnið rúmmál bílslöngu.

Úrlausn. Segjum að bílslangan S hafi radíus $a + d$ og að þvermál þversniðs hennar sé $2d$. Hálf bílslangan kemur fram við að snúa svæðinu á mynd 7.14 um y-ás svo að

$$\mathrm{v}(S) = 2 \cdot 2\pi \int_{a-d}^{a+d} xf(x)\,dx$$

þar sem $f(x) = \sqrt{d^2 - (x-a)^2}$ fyrir x á bilinu $[a - d, a + d]$. Þá fæst að

$$\begin{aligned}\mathrm{v}(S) &= 4\pi \int_{a-d}^{a+d} x\sqrt{d^2 - (x-a)^2}\,dx \\ &= 4\pi \int_{-d}^{d} (u+a)\sqrt{d^2 - u^2}\,du\end{aligned}$$



Mynd 7.14: Bílslanga og þversnið hennar

(settum $u = x - a$ svo $du = dx$)

$$= 4\pi \int_{-d}^{d} u\sqrt{d^2 - u^2}\, du + 4\pi a \int_{-d}^{d} \sqrt{d^2 - u^2}\, du.$$

Fyrra heildið hefur gildið 0, en það síðara er hálft flatarmál hrings með radíus d, svo að

$$\mathrm{v}(S) = 4\pi a \cdot \tfrac{1}{2}\pi d^2 = 2\pi^2 a d^2.$$

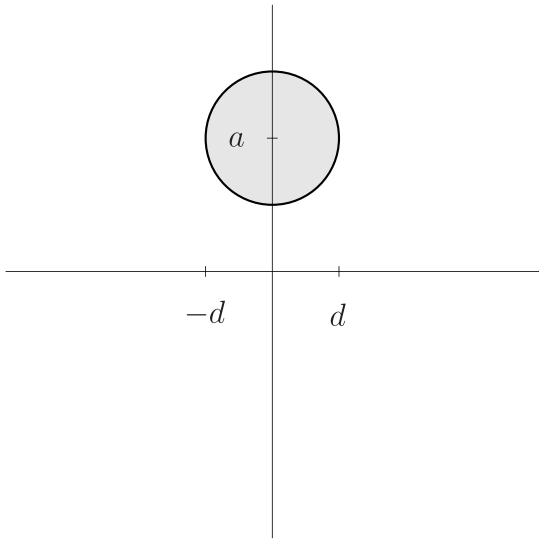
Við getum líka fengið slönguna fram með því að snúa svæðinu á mynd 7.15 um x-ásinn.

Setjum $f(x) = a + \sqrt{d^2 - x^2}$ og $g(x) = a - \sqrt{d^2 - x^2}$ ef $x \in [-d, d]$. Þá er

$$\begin{aligned} \mathrm{v}(S) &= \pi \int_{-d}^{d} (f^2(x) - g^2(x))\, dx \\ &= \pi \int_{-d}^{d} 4a\sqrt{d^2 - x^2}\, dx \\ &= 2\pi^2 a d^2. \end{aligned}$$

Verkefni 7.8

Í dæmum 1-7 skal finna rúmmál snúðstykkjanna sem koma fram þegar viðkomandi mengjum er snúið um x-ás.



Mynd 7.15:

1 $\{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{x}\}$

2 $\{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^{\frac{1}{4}}\}$

3 $\{(x,y) : -1 \le x \le 2, 0 \le y \le x^2\}$

4 $\{(x,y) : 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le y \le \sin x\}$

5 $\{(x,y) : 0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le 1\}$

6 $\{(x,y) : 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}, \sin x \le y \le \cos x\}$

7 $\{(x,y) : 0 \le x \le \sqrt{3}, 1 \le y \le \sqrt{4-x^2}\}$

Í dæmum 8-14 skal finna rúmmál snúðstykkjanna sem koma fram þegar viðkomandi mengjum er snúið um y-ás:

8 $\{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}$

9 $\{(x,y) : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\}$

10 $\{(x,y) : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \sin x\}$

11 $\{(x, y) : 0 \le x \le \frac{\pi}{4}, 0 \le y \le \cos 2x\}$

12 $\{(x, y) : 0 \le x \le 1, \sqrt{3 - x^2} \le y \le 5 + x\}$

13 $\{(x, y) : 1 \le x \le 2, 0 \le y \le \ln x\}$

14 $\{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \arccos x\}$

15 *Gefinn er hringur með radíus r og punktur í fjarlægð h frá planinu sem hringurinn liggur í. Sýnið að rúmmál keilunnar sem hringurinn og punkturinn ákvarða er $\frac{1}{3}r^2\pi h$.*

16 *Plan (slétta) myndar $45°$ horn við botnflöt sívalnings og gengur í gegnum miðstreng botnsins. Radíus botnflatarins er r og hæð sívalningsins er stærri eða jöfn r. Planið skiptir sívalningnum í tvo hluta. Sýnið að rúmmál minni hlutans er $\frac{2}{3}r^3$.*

17 *Sýnið að rúmmál kúlu með radíus r er $\frac{4}{3}\pi r^3$.*

18 *Sívalningslaga göng með radíus r eru boruð í gegnum miðja kúlu með radíus $R > r$. Reiknið rúmmál stykkisins sem verður eftir.*

19 *Finnið rúmmál snúðstykkisins sem kemur fram þegar sporbaugnum $\left\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$ er snúið um x-ás.*

7.9 Óeiginleg heildi

Heildi má útvíkka þannig að það nái líka til ótakmarkaðra bila eða ótakmarkaðra falla. Skoðum einfalt dæmi:

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1 - \frac{1}{b}$$

svo að

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

Við orðum þetta á þann veg að óeiginlega heildið $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ sé samleitið með gildið *1, skrifað*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

Almennt ef f er fall skilgreint á ótakmörkuðu bili $[a, \infty)$, sem er heildanlegt á $[a, b]$ fyrir öll $b > a$ og þannig að markgildið

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

er til þá segjum við að óeiginlega heildið $\int_a^\infty f(x)\, dx$ *sé* samleitið með gildi *A þar sem $A = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$. Við skrifum þetta*

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = A.$$

Ef markgildið er ekki til þá segjum við að óeiginlega heildið sé ósamleitið.

Þessi skilgreining er ekki ólík skilgreiningunni á samleitni raðar, heildin $\int_a^b f(x)\, dx$ svara til hlutsummanna og $\int_a^\infty f(x)\, dx$ svarar til summu raðarinnar.

Ef f er fall skilgreint á bili sem er ótakmarkað að neðan, segjum $(-\infty, b]$ þá skrifum við

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = A$$

ef

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx = A.$$

Ef fallið f er skilgreint á öllu $\mathbb{R}$ og heildanlegt á hverju takmörkuðu bili $[a, b]$ og heildin $\int_{-\infty}^c f(x)\, dx$ og $\int_c^\infty f(x)\, dx$ eru samleitin fyrir eitthvað c í $\mathbb{R}$ þá segjum við að $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ sé samleitið og gildi þess er skilgreint sem

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = \int_{-\infty}^c f(x)\, dx + \int_c^\infty f(x)\, dx.$$

Ef c' er einhver önnur tala þá eru bæði heildin

$$\int_{-\infty}^{c'} f(x)\, dx \quad \text{og} \quad \int_{c'}^\infty f(x)\, dx$$

samleitin þá og því aðeins að bæði heildin með c í stað c' eru samleitin og ef um samleitni er að ræða þá er

$$\int_{-\infty}^{c'} f(x)\, dx + \int_{c'}^\infty f(x)\, dx = \int_{-\infty}^c f(x)\, dx + \int_c^\infty f(x)\, dx.$$

Þetta má leiða út með því að skrifa

$$\int_c^b f(x)\,dx = k + \int_{c'}^b f(x)\,dx \quad \textit{og} \quad \int_a^c f(x)\,dx = -k + \int_a^{c'} f(x)\,dx$$

þar sem $k = \int_c^{c'} f(x)\,dx$. *Ef til er* c *þannig að annað hvort heildið* $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ *eða* $\int_c^\infty f(x)\,dx$ *er ósamleitið þá segjum við að óeiginlega heildið* $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ *sé ósamleitið.*

Dæmi 7.9.1. Athugum samleitni heildisins

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,dx.$$

Úrlausn. Við setjum $c = 0$ og athugum samleitni heildanna

$$\int_0^\infty e^{-|x|}\,dx \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^0 e^{-|x|}\,dx.$$

Ef $b > 0$ þá er

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-|x|}\,dx &= \int_0^b e^{-x}\,dx \\ &= \left[-e^{-x}\right]_0^{-b} \\ &= 1 - e^{-b} \to 1 \qquad \text{þegar } b \to \infty.\end{aligned}$$

Ef $a < 0$ þá er

$$\begin{aligned}\int_a^0 e^{-|x|}\,dx &= \int_a^0 e^x\,dx \\ &= \int_0^{-a} e^{-x}\,dx \\ &= 1 - e^a \to 1 \qquad \text{þegar } a \to -\infty\end{aligned}$$

svo að bæði heildin eru samleitin. Þar með er $\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,dx$ samleitið og

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^0 e^{-|x|}\,dx + \int_0^\infty e^{-|x|}\,dx = 1 + 1 = 2.$$

Fyrir heildi jákvæðra falla höfum við samleitnipróf líkt og fyrir raðir:

Setning 7.9.2. *Látum $f \geq 0$ vera skilgreint á bili $[a, \infty)$ og heildanlegt á $[a, b]$ fyrir öll $b > a$. Þá er óeiginlega heildið $\int_a^\infty f(x)\,dx$ samleitið ef og aðeins ef til er tala $M > 0$ þannig að $\int_a^b f(x)\,dx \leq M$ fyrir öll $b > a$.*

Sönnun. Setjum $I(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ fyrir öll $b > a$. Þar sem $f \geq 0$ þá er $I(b)$ vaxandi fall af b. Ef óeiginlega heildið er samleitið með gildi A þá er

$$\lim_{b\to\infty} I(b) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = A$$

svo að $I(b) \leq A$ fyrir öll $b > a$. Ef á hinn bóginn $I(b) \leq M$ fyrir öll $b > a$ þá setjum við

$$A = \sup\{I(b) : b > a\}.$$

Ef $\varepsilon > 0$ þá má velja b_0 þannig að

$$I(b_0) > A - \varepsilon.$$

En þar sem I er vaxandi þá fæst að

$$A - \varepsilon \leq I(b) \leq A \qquad \text{fyrir öll } b > b_0$$

svo að

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = A.$$

□

Líkt og fyrir raðir höfum við líka samanburðarpróf.

Setning 7.9.3. *Látum f og g vera tvö föll skilgreind á bili $[a, \infty)$ þannig að $0 \leq f \leq g$ og þannig að f og g séu heildanleg á $[a, b]$ fyrir öll $b > a$. Þá gildir að ef $\int_a^\infty g(x)\,dx$ er samleitið þá er $\int_a^\infty f(x)\,dx$ það líka, og ef seinna heildið er ósamleitið þá er hið fyrra líka ósamleitið.*

Setning 7.9.4. *Látum f og g vera tvö jákvæð föll skilgreind á bili $[a, \infty)$ þannig að f og g séu heildanleg á $[a, b]$ fyrir öll $b > a$. Ef*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0,$$

þá eru annað hvort bæði heildin $\int_a^\infty f(x)\,dx$ og $\int_a^\infty g(x)\,dx$ samleitin eða þá bæði eru ósamleitin.

Sannanir þessara setninga má byggja upp á svipaðan hátt og sannanir á tilsvarandi setningum fyrir raðir og á sönnuninni á setningu 7.9.2.

Nú er ekki hægt að beita samanburðarprófi nema á jákvæð föll. Í kaflanum um raðir skoðuðum við mörg próf sem eingöngu áttu við um raðir með jákvæðum liðum. Við innleiddum síðan hugtakið alsamleitin röð til að fá niðurstöður um almennar raðir. Samsvarandi hugtak um óeiginlegt heildi falls f sem er skilgreint á bili $[a, \infty)$ er samleitni heildisins $\int_a^\infty |f(x)|\, dx$. Áður en við fjöllum nánar um þetta atriði þurfum við á setningu að halda sem varðar heildanleika falls eins og $|f|$. Sú niðurstaða hefði raunar allt eins átt heima í kaflanum um heildi.

Setning 7.9.5. *Látum f vera heildanlegt fall á bili $[a, b]$. Þá er fallið $|f|$ líka heildanlegt á $[a, b]$.*

Sönnun. Fallið $|f|$ er skilgreint sem $|f|(x) = |f(x)|$ fyrir öll $x \in [a, b]$. Við þurfum að finna yfir- og undirsummur fyrir f þannig að mismunur þeirra verði eins lítill og vera skal. Við byrjum á því að velja yfir-og undirsummur fyrir f.

Látum $\varepsilon > 0$, látum P vera skiptingu á $[a, b]$ og látum

$$U = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{og} \quad Y = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

vera undir-og yfirsummur fyrir f svarandi til P þannig að $Y - U < \varepsilon$. Við búum til undir- og yfirsummu

$$U' = \sum_{i=1}^{n} m_i'(x_i - x_{i-1}) \quad \text{og} \quad Y' = \sum_{i=1}^{n} M_i'(x_i - x_{i-1})$$

fyrir $|f|$ á eftirfarandi hátt:

(i) Ef $m_i \geq 0$ þá setjum við $m_i' = m_i$ og $M_i' = M_i$. Þá er

$$m_i' \leq |f(x)| \leq M_i' \qquad \text{fyrir öll } x \in [x_{i-1}, x_i]$$

og

$$(M_i' - m_i')(x_i - x_{i-1}) = (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{1}$$

(ii) Ef $M_i \leq 0$ þá setjum við $m_i' = -M_i$ og $M_i' = -m_i$. Þá er

$$m_i' \leq |f(x)| \leq M_i' \qquad \text{fyrir öll } x \in [x_{i-1}, x_i]$$

og

$$(M_i' - m_i')(x_i - x_{i-1}) = (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{2}$$

(iii) Ef $m_i < 0 < M_i$ þá setjum við $m_i{}' = 0$ og $M_i{}' = \max(-m_i, M_i)$. Þá er

$$m_i{}' \le |f(x)| \le M_i{}' \qquad \text{fyrir öll } x \in [x_{i-1}, x_i]$$

og

$$\begin{aligned}(M_i{}' - m_i{}')(x_i - x_{i-1}) &= M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &< (M_i + |m_i|)(x_i - x_{i-1}) \qquad (3) \\ &= (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}).\end{aligned}$$

Þar með eru U' og Y' undir- og yfirsumma fyrir $|f|$ og úr (1),(2) og (3) fæst að

$$Y' - U' \le Y - U < \varepsilon.$$

Við höfum þar með sannað að $|f|$ sé heildanlegt fall á $[a, b]$. $\square$

Látum nú f vera skilgreint á bili af gerðinni $[a, \infty)$ og heildanlegt á $[a, b]$ fyrir öll $b > a$. Þá er $|f|$ líka heildanlegt á $[a, b]$ fyrir öll $b > a$ samkvæmt setningunni hér á undan. Við segjum að óeiginlega heildið $\int_a^\infty f(x)\,dx$ sé alsamleitið *ef óeiginlega heildið $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ er samleitið. Til að kanna alsamleitni getum við notað setningar 7.9.3 og 7.9.4. Um raðir gildir að alsamleitin röð er samleitin. Samsvarandi niðurstaða fyrir heildi er:*

Setning 7.9.6. *Ef óeiginlega heildið $\int_a^\infty f(x)\,dx$ er alsamleitið þá er það líka samleitið.*

Sönnun. Setjum $f_1 = \frac{1}{2}(|f| + f)$ og $f_2 = \frac{1}{2}(|f| - f)$. Nú gildir um hvaða rauntölu t sem er að

$$0 \le \tfrac{1}{2}(|t| + t) \le |t|$$

svo að við fáum

$$0 \le f_1 \le |f| \quad \text{og} \quad 0 \le f_2 \le |f| \quad \text{og} \quad f = f_1 - f_2.$$

Þar sem bæði f og $|f|$ eru heildanleg á $[a, b]$ fyrir öll $b > a$ þá gildir hið sama um f_1 og f_2 og samkvæmt setningu 7.9.4 eru óeiginlegu heildin $\int_a^\infty f_1(x)\,dx$ og $\int_a^\infty f_2(x)\,dx$ þá samleitin med gildum , segjum A_1 og A_2. En þá fæst, að

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_a^b f_1(x)\,dx - \lim_{b\to\infty} \int_a^b f_2(x)\,dx \\ &= A_1 - A_2,\end{aligned}$$

svo að óeiginlega heildið $\int_a^\infty f(x)\,dx$ er líka samleitið. $\square$

Athugasemd. Samsvarandi skilgreining og niðurstaða á líka við um föll sem skilgreind eru á bilum af gerðinni $(-\infty, a]$ og $(-\infty, \infty)$.

Dæmi 7.9.7. Kannið samleitni óeiginlega heildisins

$$\int_1^\infty e^{-x} x \sin x\,dx.$$

Úrlausn. Fallið $f(x) = e^{-x} x \sin x$ er samfellt og þar með heildanlegt á $[1, b]$ fyrir öll $b > 1$. Ennfremur þá er

$$\begin{aligned} \left|e^{-x} x \sin x\right| &= \left|e^{-x/2} e^{-x/2} x \sin x\right| \\ &\leq e^{-x/2} x e^{-x/2} \end{aligned}$$

($xe^{-x/2}$ tekur stærsta gildi sitt á bilinu $[1, \infty)$, $\frac{2}{e}$, í $x = 2$ svo $xe^{-x/2} \leq \frac{2}{e}$ fyrir öll x.)

$$\leq \tfrac{2}{e} e^{-x/2} \qquad \text{fyrir öll } x \geq 1.$$

Þar sem óeiginlega heildið $\int_1^{+\infty} e^{-x/2}\,dx$ er samleitið þá drögum við þá ályktun að heildið $\int_1^{+\infty} e^{-x} x \sin x\,dx$ sé alsamleitið.

Óeiginleg heildi af annarri tegund fást þegar könnuð eru ótakmörkuð föll skilgreind á takmörkuðum bilum. Lítum á eitt slíkt tilfelli: Látum $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *fyrir* x *á bilinu* $(0, 1]$*. Ef* $0 < \delta < 1$ *þá er*

$$\int_\delta^1 f(x)\,dx = [2\sqrt{x}]_\delta^1 = 2 - 2\sqrt{\delta},$$

svo að markgildið

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_\delta^1 f(x)\,dx$$

er til og jafnt 2*. Við segjum að óeiginlega heildið* $\int_{0^+}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ *sé samleitið með gildi* 2*, skrifað*

$$\int_{0^+}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$$

Látum almennt f vera fall skilgreint á hálfopnu bili $(a, b]$ sem er heildanlegt á $[t, b]$ fyrir öll t þannig að $a < t < b$. Ef markgildið

$$\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\, dx$$

er til þá segjum við að óeiginlega heildið $\int_{a^+}^b f(x)\, dx$ sé samleitið, *og ef markgildið er A þá segjum við að* gildi heildisins sé A, *skrifað*

$$\int_{a^+}^b f(x)\, dx = A.$$

Samsvarandi skilgreiningu fyrir hálfopin bil af gerðinni $[a, b)$ eða opin bil (a, b) er einfalt að setja fram.

Dæmi 7.9.8. Fyrir hvaða gildi á s er óeiginlega heildið $\int_{0^+}^1 x^s\, dx$ samleitið?

Úrlausn.

$$\int_t^1 x^s\, dx = \begin{cases} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+1} t^{s+1} & \text{ef } s \neq -1 \\ -\ln t & \text{ef } s = -1 \end{cases}$$

svo að óeiginlega heildið er samleitið ef og einungis ef $s + 1 > 0$, það er ef $s > -1$ (ef $s < -1$ þá stefnir heildið á ∞).

Um samleitni óeiginlegra heilda af þessari gerð má fá svipaðar niðurstöður og fengust hér á undan um óeiginleg heildi á ótakmörkuðum bilum. Það er góð æfing að leiða þessar niðurstöður út.

Við skulum að lokum líta á eitt dæmi þar sem fyrir koma óeiginleg heildi af báðum gerðum.

Dæmi 7.9.9. Gerið grein fyrir því að heildið

$$\Gamma(s) = \int_{0^+}^\infty e^{-t} t^{s-1}\, dt$$

sé samleitið fyrir öll $s > 0$.

Úrlausn. Við verðum að líta á heildið sem summu tveggja óeiginlegra heilda,

$$\int_{0^+}^1 e^{-t} t^{s-1}\, dt \quad \text{og} \quad \int_1^\infty e^{-t} t^{s-1}\, dt.$$

(Við getum raunar sett hvaða tölu $c > 0$ sem er í stað tölunnar 1). Þar sem $|e^{-t} t^{s-1}| < t^{s-1}$ ef $0 < t \leq 1$ þá er fyrra heildið samleitið ef $s > 0$ samkvæmt dæminu hér á undan. Þar sem $e^{-t}t^{s-1} \leq Mt^{-2}$ fyrir öll s (vegna þess að $\lim_{t\to\infty} e^{-t}t^u = 0$ fyrir öll u), þar sem M er fasti, háður s, þá er seinna heildið samleitið fyrir öll s. Þess vegna eru bæði heildin samleitin ef $s > 0$. Fallið

$$\Gamma(s) = \int_{0^+}^{\infty} e^{-t}t^{s-1}\,dt$$

er því skilgreint á bilinu $(0, \infty)$. Þetta fall kallast *gammafallið*. Það hefur meðal annars þann eiginleika að $\Gamma(n+1) = n!$ fyrir allar náttúrlegar tölur n. (Sjá dæmi 21 í verkefnakafla 7.9.)

Verkefni 7.9

Ákvarðið hvort heildin í dæmum 1-12 eru samleitin og reiknið út gildi þeirra ef svo er:

1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$

2 $\displaystyle\int_0^{4^-} \frac{dx}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}$

3 $\displaystyle\int_0^{4^-} \frac{dx}{(4-x)^{\frac{2}{3}}}$

4 $\displaystyle\int_{1^+}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2}$

5 $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

6 $\displaystyle\int_{0^+}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$

7 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

8 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx$

9 $\displaystyle\int_{0^+}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

10 $\displaystyle\int_{0^+}^{\infty} \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)dx$

11 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x|}\,dx$

12 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$

13 *Finnið öll gildi á c sem gera heildið*

$$\int_2^{\infty} \left(\frac{cx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right)dx$$

samleitið og reiknið út heildið fyrir þau gildi.

14 *Finnið öll gildi á c sem gera heildið*

$$\int_1^\infty \left(\frac{x}{2x^2 + 2c} - \frac{3c}{x+1} \right) dx$$

samleitið, og reiknið út heildið fyrir þau gildi.

Finnið flatarmál ótakmörkuðu svæðanna í dæmum 15 og 16.

15 $\{(x, y) : 0 \leq x < 1, 0 \leq y \leq \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\}$

16 $\{(x, y) : 0 \leq x, 0 \leq y \leq xe^{-\frac{x^2}{2}}\}$

Ákvarðið hvort heildin í dæmum 17-20 eru samleitin.

17 $\displaystyle\int_{0^+}^1 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$

18 $\displaystyle\int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{x-1}\, dx$

19 $\displaystyle\int_{0^+}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{x}\, dx$

20 $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}$

21 *Sýnið að* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *fyrir öll* $x > 0$ *og ályktið út frá því að að* $\Gamma(n+1) = n!$ *fyrir allar náttúrlegar tölur* n.

7.10 Heildispróf fyrir raðir

Liðina í jákvæðri minnkandi röð má líta á sem fallgildi minnkandi falls, til dæmis þá eru liðirnir í röðinni $\sum \frac{1}{n^2}$ *gildi fallsins* $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *í náttúrulegu tölunum. Á slíkar raðir getum við beitt* heildisprófi*:*

Setning 7.10.1 (Heildispróf)**.** *Ef* f *er jákvætt og minnkandi fall skilgreint á bilinu* $[1, \infty)$*, þá er röðin*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

samleitin ef og aðeins ef óeiginlega heildið

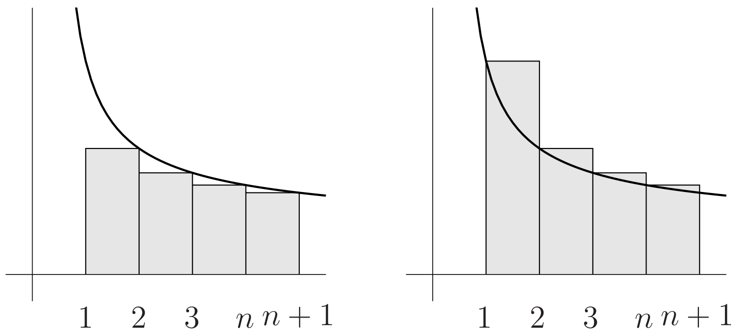
$$\int_1^\infty f(x)\, dx$$

er samleitið.

Sönnun. Auðséð er (sbr. mynd 7.16) að

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Af þessum ójöfnum sjáum við strax að röðin $\sum f(n)$ hefur takmarkaðar



Mynd 7.16:

hlutsummur ef og aðeins ef $\sup_b \int_1^b f(x)\,dx < \infty$. Fullyrðingin er því afleiðing af setningum 2.2.11 og 7.9.2. □

Dæmi 7.10.2. Ákvarðið hvaða gildi á s gera röðina $\sum n^s$ samleitna.

Úrlausn. Ljóst er að röðin er ósamleitin ef $s \geq 0$. Látum nú $s < 0$ vera rauntölu og setjum $f(x) = x^s$ fyrir öll x úr $[1, \infty)$. Þá er f jákvætt minnkandi fall og $\sum n^s = \sum f(n)$. Nú gildir að

$$\int_1^b x^s\,dx = \begin{cases} \frac{1}{s+1}b^{s+1} - \frac{1}{s+1} & \text{ef } s \neq -1 \\ \ln b & \text{ef } s = -1 \end{cases}$$

svo að óeiginlega heildið er samleitið ef $s + 1 < 0$ en ósamleitið annars. Þar með fæst að röðin $\sum n^s$ er samleitin ef $s < -1$ en ósamleitin fyrir önnur gildi á s.

Verkefni 7.10

Kannið samleitni raðanna í dæmum 1-12.

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$

2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$

3 $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{\frac{2}{3}}}$

4 $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)(\ln(\ln k))}$

5 $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k}{k(\ln k)(\ln(\ln k))^{\frac{3}{2}}}$

6 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$

7 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k}$

8 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$

9 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{1.05}}$

10 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

11 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln k)^2}{n^{\frac{3}{2}}}$

12 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln k)^3}{k^2}$

13 *Fyrir hvaða gildi á p er röðin*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$$

samleitin?

14 *Fyrir hvaða gildi á p og q er röðin*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p(\ln k)^q}$$

samleitin?

15 *Fyrir hvaða gildi á p,q og r er röðin*

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^p(\ln k)^q(\ln(\ln k))^r}$$

samleitin?

16 *Látum $f(x)$ vera jákvætt, stranglega minnkandi og heildanlegt fall á $[0, \infty[$ og setjum fyrir öll $n \geq 1$*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \frac{1}{2}\int_{n}^{n+1} f(x)\,dx + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Sýnið að

$$S_n - \frac{1}{2}f(n) < \sum_{k=1}^{\infty} f(k) < S_n + \frac{1}{2}f(n).$$

Kafli 8

Veldaraðir

Af þeim föllum sem við höfum fjallað um eru margliðuföllin einna einföldust, þ.e.a.s. föll eins og $f(x) = 7x^4 - \pi x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x$ *eða almennt* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. *Stuðlarnir* $a_0, \ldots, a_n$ *eru gefnar tölur og fallgildin* $f(x)$ *eru fundin með því að setja* x*-gildin inn í forskriftina fyrir* f. *Til dæmis gildir um fyrri margliðuna hér að ofan*

$$f(2) = 7 \cdot 2^4 + \pi \cdot 2^3 + \frac{3}{2}2^2 + 2 = 120 + 8\pi.$$

Margliðuföll er líka einfalt að diffra og heilda.

Þegar um er að ræða föll eins og veldisvísisfallið, náttúrlega lygrann og hornaföllin er málið ekki eins einfalt. Við getum reynt að nálga föllin með margliðum, metið skekkjuna og þannig nálgað fallgildin og gefið upp mat á nálguninni. En er ekki mögulegt að gefa einfalda forskrift líkt og fyrir margliður til að reikna út fallgildin? Svarið við því er að mörg mikilvæg föll er hægt að setja fram með svipuðum hætti og margliðuföllin ef við leyfum óendanlega marga liði í stað endanlega margra liða eins og þegar um margliðuföll er að ræða.

Til þess að geta fjallað um þessa hluti á skipulegan hátt þurfum við á nýju hugtaki að halda, nefnilega hugtakinu veldaröð.

8.1 Veldaraðir

Röð af gerðinni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

þar sem $a, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ eru gefnar tvinntölur, kallast veldaröð *í $z - a$. Tölurnar a_n kallast* stuðlar veldaraðarinnar*. Veldaröð er þannig* skari *af röðum. Hver tvinntala z gefur röð í skaranum. Fyrir gefna veldaröð er það áhugavert viðfangsefni að kanna hvaða tvinntölur z gefa samleitna röð. Þar er veldaröðin sögð samleitin.*

Dæmi 8.1.1. Röðin

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

er samleitin fyrir $z = 0$ en ósamleitin fyrir öll önnur gildi á z, því ef $z \neq 0$ þá er $\lim_{n\to\infty} |n^n z^n| = \lim_{n\to\infty} |nz|^n = +\infty$ svo að n-ti liður raðarinnar stefnir ekki á 0 þegar n stefnir á óendanlegt en það er *nauðsynlegt* skilyrði fyrir samleitni.

Dæmi 8.1.2. Röðin

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

er samleitin ef $|z| < 1$ en ósamleitin ef $|z| \geq 1$.

Dæmi 8.1.3. Röðin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

er samleitin ef $z = 0$. Ef $z \neq 0$ þá beitum við kvótaprófi (setning 2.3.23) á röðina $\sum(|z|^n / n!)$. Þá sést að röðin er *alsamleitin* fyrir öll z úr $\mathbb{C}$ og þar með auðvitað samleitin fyrir öll z úr $\mathbb{C}$.

Þessi þrjú sýnishorn eru dæmigerð fyrir veldaraðir. Um þær gildir eftirfarandi setning:

Setning 8.1.4. *Látum $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ vera veldaröð. Þá gildir eitt af þrennu.*

(i) *Röðin er einungis samleitin ef $z = a$.*
(ii) *Röðin er alsamleitin fyrir öll $z \in \mathbb{C}$.*
(iii) *Til er tala $R > 0$ þannig að röðin er alsamleitin ef $|z - a| < R$ (þ.e.a.s. ef z liggur innan hringskífu með miðju a og radíus R) og ósamleitin ef $|z - a| > R$.*

Í tilfelli (iii) kallast talan R samleitniradíus *eða* samleitnigeisli *veldaraðarinnar og hringurinn með miðju* a *og radíus* R *kallast þá* samleitnihringur *hennar. Í þessu tilfelli er röðin alsamleitin ef* z *liggur innan samleitnihringsins en ósamleitin utan hans. Fyrir tvinntölurnar á sjálfum hringnum, þ.e.a.s. fyrir þær tölur* z *þannig að* $|z-a|=R$, *er ekki hægt að segja neitt almennt um samleitni veldaraðarinnar. Með víðsýnni túlkun á orðinu hringur má líta á (i) og (ii) sem sértilfelli af (iii): Annars vegar er hringur með radíus* 0 *og hins vegar er hringur með radíus* $+\infty$. *Í dæmum 8.1.1, 8.1.2 og 8.1.3 hér að framan koma öll tilfellin fyrir.*

Sönnun á setningu 8.1.4. Við skulum byrja á því að sanna að sé röðin samleitin fyrir einhverja tölu $z_0 \neq a$, þá er röðin *alsamleitin* fyrir öll z þannig að $|z-a| < |z_0 - a|$ (þ.e.a.s. fyrir allar tölur z sem eru nær tölunni a en talan z_0).

Ef $\sum a_n(z_0-a)^n$ er samleitin þá hlýtur n-ti liður að stefna á 0 svo finna má tölu N þannig, að $|a_n(z_0-a)|^n < 1$ fyrir öll $n \geq N$. Þá fæst:

$$\begin{aligned}
|a_n(z-a)^n| &= \left| a_n(z_0-a)^n \frac{(z-a)^n}{(z_0-a)^n} \right| \\
&= |a_n(z_0-a)^n| \cdot \frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n} \\
&< \ell^n \qquad \text{ef } n \geq N,
\end{aligned}$$

þar sem $\ell = (|z-a| \,/\, |z_0-a|) < 1$. Samanburðarpróf sýnir okkur nú að $\sum a_n(z-a)^n$ er samleitin. Ef röðin er einungis samleitin fyrir $z=a$ þá erum við í tilfelli (i) og ekkert þarf að sanna. Ef hins vegar röðin er samleitin fyrir eitthvert $z \neq a$ þá látum við $R = \sup A$ þar sem

$$A = \{|z-a| : \sum a_n(z-a)^n \text{er samleitin}\}.$$

Ef $R = +\infty$ þá er röðin alsamleitin fyrir öll z úr $\mathbb{C}$, því ef z er í $\mathbb{C}$, þá má finna z_0 úr A þannig að $|z_0-a| > |z-a|$ og $\sum a_n(z_0-a)^n$ er samleitin. Ef nú $0 < R < +\infty$ og ef $|z-a| < R$ þá er til $z_0 \in \mathbb{C}$ þannig að, $\sum a_n(z_0-a)^n$ er samleitin og $|z_0-a| > |z-a|$ samkvæmt skilgreiningu á R. En þá er röðin $\sum a_n(z-a)^n$ alsamleitin samkvæmt samanburðarprófi (setning 2.3.5). Ef hins vegar $|z-a| > R$ þá er $\sum a_n(z-a)^n$ ósamleitin samkvæmt skilgreiningu á R. □

Í næstu setningu fáum við aðferð til að ákvarða samleitniradíusinn R.

Setning 8.1.5. *Látum $\sum a_n(z-a)^n$ vera veldaröð.*

(i) *Ef*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = +\infty$$

þá er röðin einungis samleitin ef $z = a$ (þ.e.a.s. samleitniradíusinn $R = 0$).

(ii) *Ef*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$$

þá er röðin alsamleitin fyrir öll $z \in \mathbb{C}$ (þ.e.a.s. samleitniradíusinn $R = +\infty$).

(iii) *Ef*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = S > 0$$

þá er samleitniradíusinn $R = 1/S$.

Sönnun. Til þess að gera grein fyrir þessu lítum við á markgildið

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |a_n(z-a)^n|^{1/n} &= \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} |z-a| \\ &= |z-a| \cdot \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.\end{aligned}$$

Rótarprófið sýnir, að í tilfelli (iii) er röðin $\sum a_n(z-a)^n$ samleitin ef $|z-a| \cdot S < 1$ en ósamleitin ef $|z-a| \cdot S > 1$. Þar sem við vitum að röðin er alsamleitin innan samleitnihringsins þá hlýtur $R = 1/S$. Í tilfelli (i) stefnir n-ti liðurinn $a_n(z-a)^n$ ekki á 0 þegar n stefnir á óendanlegt (nema ef $a = z$), en í tilfelli (ii) sýnir rótarprófið að röðin er alsamleitin hver svo sem talan z er. $\square$

Athugasemd. Einnig má nota kvótapróf til þess að finna samleitniradíusinn R.

Látum $\sum a_n(z-a)^n$ vera veldaröð með samleitniradíus R. Eins og við sáum hér að framan þá er röðin alsamleitin innan samleitnihringsins, þ.e.a.s. hún er samleitin ef $|z-a| < R$ og ósamleitin ef $|z-a| > R$. Fyrir z á sjálfum hringnum, þ.e.a.s. ef $|z-a| = R$, er ekkert hægt að segja almennt. Það þarf að athuga samleitni sérstaklega hverju sinni. Eftirfarandi dæmi sýna nokkur þeirra tilfella sem geta komið upp.

Dæmi 8.1.6. (i) Röðin $\sum z^n$ hefur samleitniradíus 1. Hún er ekki samleitin á samleitnihringnum vegna þess að fyrir $|z| = 1$ stefnir n-ti liður raðarinnar ekki á 0 með vaxandi n.

(ii) Rótarpróf sýnir að röðin $\sum (1/n)z^n$ hefur samleitniradíus 1. Á samleitnihringnum, þ.e.a.s. ef $|z| = 1$, er röðin alls staðar samleitin nema fyrir $z = 1$, eins og sýnt verður fram á hér á eftir.
(iii) Rótarpróf sýnir að röðin $\sum (1/n^2)z^n$ hefur samleitniradíus 1 og samanburðarpróf sýnir að röðin er alsamleitin á samleitnihringnum.

Í 2. kafla var lítið eitt minnst á skilyrt samleitnar raðir. Á skilyrt samleitnar raðir gátum við stundum beitt prófi sem við kölluðum víxlraðarpróf. Þessu prófi var einungis hægt að beita á rauntöluraðir. Til þess að kanna samleitni raðar á sjálfum samleitnihringnum ætlum við að innleiða próf sem á við um tvinntalnaraðir og hefur víxlraðarprófið sem sértilvik. Áður en við setjum þetta próf fram þurfum við á hjálparsetningu að halda.

Hjálparsetning 8.1.7 (Hlutsummuformúla Abels). *Látum (a_n) og (b_n) vera tvinntalnarunur og setjum $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Þá er*

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^n A_k(b_k - b_{k+1}) \qquad \textit{fyrir öll } n \in \mathbb{N}.$$

Sönnun. Við höfum að $a_1 = A_1$ og ef $k > 1$ þá er $a_k = A_k - A_{k-1}$ svo að

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n a_k b_k &= A_1 b_1 + \sum_{k=2}^n (A_k - A_{k-1}) b_k \\
&= A_1 b_1 + \sum_{k=2}^n A_k b_k - \sum_{k=2}^n A_{k-1} b_k \\
&= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^n A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}
\end{aligned}$$

□

Setning 8.1.8. *Látum $\sum a_n$ vera tvinntalnaröð sem hefur takmarkaða hlutsummurunu og látum (b_n) vera minnkandi rauntalnarunu með markgildi 0. Þá er röðin $\sum a_n b_n$ samleitin.*

Sönnun. Látum (s_n) tákna hlutsummurunu raðarinnar $\sum a_n b_n$. Samkvæmt hjálparsetningunni er

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1})$$

þar sem $A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ eins og fyrr. Samkvæmt forsendum er til tala $M > 0$ þannig að $|A_k| \leq M$ fyrir öll k, svo að um öll n gildir að

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq M \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = M(b_1 - b_{n+1}) \leq M \cdot b_1.$$

Þetta sýnir að röðin $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ er alsamleitin og þar með samleitin með summu sem við köllum C. Ennfremur þá gildir að

$$0 \leq |A_n b_{n+1}| \leq M b_{n+1}$$

svo að

$$\lim_{n\to+\infty} A_n b_{n+1} = 0.$$

Af þessu leiðir að

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} s_n &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) \right) \\
&= 0 + C = C
\end{aligned}$$

og við ályktum að röðin $\sum a_n b_n$ sé samleitin. $\square$

Dæmi 8.1.9. Ef (b_n) er minnkandi runa með markgildi 0 og ef z er tvinntala, $|z| = 1$ en $z \neq 1$, þá er röðin $\sum z^n b_n$ samleitin.

Úrlausn. Samkvæmt setningu 8.1.8 þá nægir að sýna að röðin $\sum z^n$ hafi takmarkaðar hlutsummur ef $|z| = 1$ og $z \neq 1$. En,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z^k \right| = \left| z \frac{z^n - 1}{z - 1} \right| \leq |z| \frac{2}{|z-1|} \qquad \text{fyrir öll } n.$$

Ef röðin $\sum z^n b_n$ *er samleitin þá er hlutsummurunan* (s_n) *samleitin. Þar með eru rauntalnarunurnar* $(\operatorname{Re} s_n)$ *og* $(\operatorname{Im} s_n)$ *einnig samleitnar (sjá umfjöllun um tvinntalnarunur í 2. kafla) og þar með eru báðar rauntalnaraðirnar* $\sum \operatorname{Re} z^n b_n$ *og* $\sum \operatorname{Im} z^n b_n$ *samleitnar. Skrifum* $z = \cos\theta + i\sin\theta$*. Þá er*

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

og þar með eru báðar raðirnar

$$\sum b_n \cos n\theta \quad \textit{og} \quad \sum b_n \sin n\theta$$

samleitnar ef röðin $\sum z^n b_n$ *er samleitin og* $|z| = 1$ *en* $z \neq 1$*, þ.e. ef* $0 < \theta < 2\pi$*. Við höfum því sér í lagi að raðirnar*

$$\sum \frac{\cos n\theta}{n^s} \quad \textit{og} \quad \sum \frac{\sin n\theta}{n^s}$$

eru samleitnar ef $s > 0$ *og* $0 < \theta < 2\pi$*. Þetta er athyglisvert í ljósi þess að röðin* $\sum 1/n^s$ *er ósamleitin ef* $0 < s \leq 1$*.*

Dæmi 8.1.10. Raðirnar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$$

hafa sama samleitniradíus.

Úrlausn. Ójafnan

$$|a_n(z-a)|^n \leq |z-a| \left| n a_n (z-a)^{n-1} \right| \qquad \text{fyrir } n \geq 1$$

sýnir að fyrri röðin er alsamleitin fyrir þau z sem gera þá síðari alsamleitna. Þetta sýnir að samleitniradíus fyrri raðarinnar R_1 er að minnsta kosti jafn stór og samleitniradíus þeirrar síðari, R_2, þ.e.a.s. $R_1 \geq R_2$. Gerum nú ráð fyrir að $|z-a| < R_1$ og veljum z_0 þannig að $|z-a| < |z_0 - a| < R_1$. Látum ennfremur

$$\ell = \frac{|z-a|}{|z_0 - a|} < 1.$$

Nú er röðin $\sum a_n (z_0 - a)^n$ samleitin svo finna má tölu N þannig að

$$|a_n (z_0 - a)^n| < 1 \qquad \text{ef } n \geq N.$$

Þá fæst

$$\left|na_n(z-a)^{n-1}\right| = \left|na_n(z_0-a)^n\frac{(z-a)^{n-1}}{(z_0-a)^n}\right| < \frac{n\ell^{n-1}}{|z_0-a|} \qquad \text{ef } n \geq N.$$

Fljótséð er með hlutfallsprófi að röðin $\sum \frac{n}{|z_0-a|}\ell^{n-1}$ er samleitin og því er $\sum na_n(z-a)^{n-1}$ alsamleitin. Við höfum þá sýnt fram á það, að röðin $\sum na_n(z-a)^{n-1}$ er alsamleitin innan hrings með miðju í a og radíus R_1 svo að $R_1 \leq R_2$.

Nú getum við sett raðirnar $\sum na_n(z-a)^{n-1}$ og $\sum n(n-1)a_n(z-a)^{n-2}$ í stað hinna tveggja og fáum við þá á sama hátt að þessar raðir hafa sama samleitniradíus. Almennt fæst: Fyrir gefna tölu $k \in \mathbb{N}$ þá hefur röðin $\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}$ sama samleitniradíus og röðin $\sum a_n(z-a)^n$.

Verkefni 8.1

Finnið samleitniradíus veldaraðanna í dæmum 1-12 og kannið jafnframt samleitni þeirra á jaðri samleitniskífunnar.

1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$

2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}z^n$

3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}z^n$

4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(2+\frac{1}{n})^n}$

5 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n!\sin\frac{\pi}{n}}$

6 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n+4^n}$

7 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^n z^n$

8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n)z^n$

9 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{\ln n}$

10 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n^2z^n$

11 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\ln n}z^n$

12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n^n)}z^n$

13 *Fyrir hvaða tvinntölur z er röðin*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{z+i}{z} \right)^n$$

(a) alsamleitin?

(b) skilyrt samleitin?

Sýnið á skýringarmynd legu tvinntalnanna í liðum a) og b).

8.2 Rauntöluveldaraðir

Lítum á veldaröð $\sum a_n(z-a)^n$ *þar sem* a *og allir stuðlarnir* a_n *eru* rauntölur. *Ef samleitniradíus veldaraðarinnar er* R *þá er röðin sér í lagi samleitin á bilinu* $I = (a-R, a+R)$. *Fyrir* $x \in I$ *táknum við summu veldaraðarinnar með* $f(x)$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \tag{1}$$

Fallið f *er þá rauntölufall á bilinu* I *og við segjum að* f hafi framsetningu sem veldaröð *á bilinu* I. *Við ætlum nú að rannsaka slík föll lítillega, en þau má líta á sem alhæfingu á margliðuföllum. Við byrjum á því að sanna að fall sem hefur framsetningu sem veldaröð sé samfellt.*

Setning 8.2.1. *Lát* $f(x) = \sum a_n(x-a)^n$ *hafa framsetningu sem veldaröð á bilinu* $I = (a-R, a+R)$. *Þá er* f *samfellt á* I.

Sönnun. Lát x_0 vera úr I og lát $\epsilon > 0$ vera gefið. Veljum $0 < r < R$ þannig að $|x_0 - a| < r$ og skrifum

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^N = \sum_{n=0}^{N} a_n(x-a)^n + L_N(x).$$

Köllum fyrri liðinn hægra megin $P_N(x)$. Metum seinni liðinn,

$$|L_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||(x-a)|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n \text{ ef } |x-a| < r.$$

Veljum nú N þannig að $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n < \epsilon/4$ og notum síðan samfelldni f, með skilgreiningu 3.1.11, til að velja δ, þar sem $0 < \delta < r - |x_0 - a|$, þannig að

$$|P_N(x) - P_N(x_0)| < \epsilon/2 \text{ ef } |x - x_0| < \delta.$$

Þá er

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |P_N(x) + L_N(x) - P_N(x_0) - L_N(x_0)| \\ &\leq |P_N(x) - P_N(x_0)| + |L_N(x)| + |L_N(x_0| \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon \end{aligned}$$

ef $|x - x_0| < \delta$. □

Næsta setning sýnir að heilda má fall sem hefur framsetningu sem veldaröð með því að heilda lið fyrir lið í veldaröðinni.

Setning 8.2.2. *Látum f hafa framsetningu sem veldaröð*

$$f(x) = \sum a_n (x - a)^n \qquad \textit{fyrir öll } x \in I = (a - R, a + R)$$

þá er f samfellt á bilinu I og

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n (x - a)^{n+1} \qquad \textit{fyrir öll } x \in I \tag{2}$$

Sönnun. Lát x vera úr I. Veljum r, $0 < r < R$, þannig að $|x - a| < r$ og látum N vera náttúrulega tölu. Eins og í sönnuninni að ofan skrifum við $f(t) = P_N(t) + L_N(t)$. Nú fæst að

$$|\int_a^x L_N(t)dt| \leq \int_a^x \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n \leq r \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n$$

svo að $\lim_{N\to\infty} \int_a^x L_N(t)dt = 0$. Þar sem,

$$\int_a^x P_N(t)dt = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} a_n (x - a)^{n+1}$$

fæst því með því að láta N stefna á óendanlegt að

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x P_N(t)dt + \int_a^x L_N(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n (x - a)^{n+1}.$$

□

Eins og við sáum í dæmi 8.1.10 hér að framan, þá er röðin

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1} \tag{3}$$

samleitin á bilinu I. Fyrir x úr I þá látum við $g(x)$ tákna summu raðarinnar (3),

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$$

Nú er röðin (3) fram komin við að röðin (1) er diffruð lið fyrir lið (m.t.t. x). Sú spurning vaknar þá hvort fallið f sé diffranlegt á I og hvort $f'(x) = g(x)$ fyrir öll $x \in I$. Þetta er rétt.

Setning 8.2.3. *Lát f vera fall á opna bilinu $I = (a - R, a + R)$ sem hefur framsetningu sem veldaröð*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad \text{fyrir öll } x \in I.$$

Þá er fallið f diffranlegt á I og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1} \qquad \text{fyrir öll } x \in I.$$

Sönnun. Látum $g(x) = \sum(n+1)a_{n+1}(x-a)^n$ fyrir x úr I (g hefur sama samleitnibil og f samkvæmt Dæni 8.1.10). Samkvæmt setningunum hér að ofan þá er g samfellt á bilinu I og ef x er úr I þá getum við heildað g á bilinu $[a, x]$ með því að heilda lið fyr ir lið í veldaröð g. Þá fæst,

$$\int_a^x g(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(x-a)^{n+1} = f(x) - a_0,$$

svo að

$$f(x) = \int_a^x g(t)dt + a_0.$$

Þar með er f diffranlegt og

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a-x)^{n-1}.$$

□

Við getum nú beitt setningu 8.2.3 á veldaröðina $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ *og þá kemur í ljós að* f *er tvídiffranlegt á* I *og að* $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}$*. Almennt gildir:*

Setning 8.2.4. *Gerum ráð fyrir að* f *hafi framsetningu sem veldaröð á bili* $I = (a-R, a+R)$*,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad \textit{fyrir öll } x \in I.$$

þá eru allar afleiður af f *til á bilinu* I *og*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}.$$

Niðurstöðuna úr setningunum hér að ofan má draga saman á einfaldan hátt. Ef fall f *hefur samsetningu sem veldaröð sem er samleitin á bili* $I = (a-R, a+R)$*, þá má heilda eða diffra* f *með því að heilda eða diffra lið fyrir lið í veldaröðinni. Þ.e.a.s.* víxla má diffrun og $\sum$-merki og heildun og $\sum$-merki innan samleitnibils veldaraðarinnar*, og þar sem summa veldaraðarinnar er sér í lagi samfelld á* I*, þá má* víxla á lim og $\sum$-merki.

Dæmi 8.2.5. (i) Við vitum, að röðin $\sum x^n$ er samleitin á bilinu $(-1,1)$ og ósamleitin ef $|x| \geq 1$. Ennfremur vitum við að $\sum x^n = 1/(1-x)$ fyrir öll $x \in (-1,1)$. Diffrun gefur $\sum nx^{n-1} = 1/(1-x)^2$ fyrir öll $x \in (-1,1)$. Heildun gefur aftur á móti $\sum \frac{1}{n+1}x^{n+1} = -\ln(1-x)$ fyrir öll $x \in (-1,1)$.

(ii) Ef sett er $-x^2$ í stað x í fyrstu röðina hér að ofan fæst

$$\sum (-1)^n x^{2n} = 1/(1+x^2)$$

fyrir öll $x \in (-1,1)$. Ef þessi röð er heilduð fæst:

$$\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan x \qquad \text{fyrir öll } x \in (-1,1).$$

(iii) Samkvæmt (i) og Setningu (2.3.17) þá er

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \ln(1-x) \right| \leq \frac{|x|^{N+2}}{N+2}$$

fyrir öll $x \in (-1,0)$ og þar með er

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \ln(1-x)\right| < \frac{1}{N+2}$$

fyrir öll $x \in (-1,0)$. Látum x stefna á -1 og ályktum að

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} (-1)^{n+1} + \ln(2)\right| \leq \frac{1}{N+2}.$$

En þetta segir okkur að samleitna víxlröðin $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1}(-1)^{n+1}$ hafi summuna $-\ln 2$ og þar með að

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}(-1)^n = \ln 2.$$

Verkefni 8.2

Skrifið föllin í dæmum 1-8 sem veldaröð í x og finnið samleitniradíus þeirra.

1 $\dfrac{1}{1-x}$

2 $\dfrac{x}{(1-x)^2}$

3 $\dfrac{x^2+1}{(1-x)^3}$

4 $(1-x)\ln(1-x)$

5 $\dfrac{1}{1+x^2}$

6 $x \arctan x$

7 $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

8 $\dfrac{1}{x^2-2x+1}$

9 *Látum*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Sýnið að $f(x)$ sé skilgreint fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ og að $f'(x) = f(x)$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. Sýnið síðan að $f(x) = e^x$.

10 *Látum*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Sýnið að $f(x)$ sé skilgreint fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ og að $f''(x) + f(x) = 0$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. Sýnið síðan að $f(x) = \sin x$.

11 *Sannið eftirfarandi formúlu sem kennd er við skoska stærðfræðinginn James Gregory (1638-1675).*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots .$$

$\Big[$*Ábending:* $\arctan x = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.\Big]$

12 *Látum a_n, $n \geq 1$ vera Fibbonacci tölurnar sem skilgreindar voru í dæmi 1.3.13.*

(a) Notið niðurstöðuna úr dæmi 36 í verkefnakafla 2.2 til þess að ákvarða samleitnigeisla veldaraðarinnar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

(b) Látum R tákna samleitnigeisla veldaraðarinnar og látum

$$f : (-R, R) \to \mathbb{R}$$

vera fallið sem skilgreint er með

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Sýnið að

$$(x + x^2)f(x) = f(x) - (x + x^2),$$

fyrir öll $x \in (-R, R)$, og ályktið út frá því að

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} - 1.$$

(c) Notið niðurstöðuna úr b-lið til þess að finna formúlu fyrir a_n.

8.3 Taylor-raðir

Föll sem hafa framsetningu sem veldaröð á bili I eru á vissan hátt jafn meðfærileg og margliður. Þau eru sér í lagi óendanlega oft diffranleg. Ekki hafa öll óendanlega oft diffranleg föll framsetningu sem veldaröð, en mörg algeng föll hafa slíka framsetningu. Athugum þetta nánar.

Látum f vera fall sem er óendanlega oft diffranlegt á opnu bili I og látum $a \in I$. Við getum þá myndað veldaröðina

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Þessi röð kallast Taylor-röð fallsins f í punktinum a. *Eðlilegt er að spyrja þess hvort röðin sé samleitin á einhverju bili um a og þá hvort summan sé $f(x)$. En nú er $(n+1)$-ta hlutsumma raðarinnar einmitt n-ta Taylor-margliða fallsins f í punktinum a og*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{R}_n(x).$$

Þess vegna er röðin samleitin með summu $f(x)$ á bili I um a þá og því aðeins að $\lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_n(x) = 0$ fyrir öll $x \in I$. Samkvæmt leifaformúlu Lagrange (sjá setningu 4.4.12), þá er

$$\mathrm{R}_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t_0)$$

fyrir eitthvert t_0 milli x og a. Ef finna má tölu $A > 0$ þannig að

$$\left|f^{(n)}(t)\right| \leq A^n \qquad \textit{fyrir öll } t \in I \textit{ og öll } n \in \mathbb{N}$$

þá fæst úr þessu, að $\lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_n(x) = 0$ fyrir öll $x \in I$. Þar með fæst:

Setning 8.3.1. *Látum f vera óendanlega oft diffranlegt fall á opnu bili I um a og gerum ráð fyrir því, að til sé tala $A > 0$ þannig, að $\left|f^{(n)}(t)\right| \leq A^n$ fyrir öll $t \in I$ og öll $n \in \mathbb{N}$. Þá er*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \textit{fyrir öll } x \in I$$

Dæmi 8.3.2 (Taylor-raðir hornafalla og veldisvísisfallsins)**.**
(i) Látum $f(x) = \sin x$. Hér er

$$\left|f^{(n)}(t)\right| \leq 1 \qquad \text{fyrir öll } t \in \mathbb{R} \text{ og öll } n \in \mathbb{N}$$

svo að

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \tag{1}$$

fyrir öll $x \in \mathbb{R}$.
(ii) Á sama hátt gildir að

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{2}$$

fyrir öll $x \in \mathbb{R}$.
(iii) Látum $r > 0$, $I = (-r, r)$ og $f(x) = e^x$. þá er

$$f^{(n)}(t) = e^t < e^r < (e^r)^n \qquad \text{fyrir öll } t \in I \text{ og öll } n \in \mathbb{N}$$

svo að

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad \text{fyrir öll } x \in I.$$

Þar sem $r > 0$ getur verið hvaða jákvæða tala sem er, þá gildir þessi veldaraðarframsetning veldisvísisfallsins um öll $x \in \mathbb{R}$.
Við getum notað jöfnur (1) og (2) sem *skilgreiningu* á föllunum $\sin x$ og $\cos x$. Ljóst er að $\sin 0 = 0$ og $\cos 0 = 1$ og þar sem okkur er heimit að diffra summu veldaraðar með því að diffra lið fyrir lið í röðinni, þá sést strax að

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \text{og} \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \tag{3}$$

En hvað með samlagningarformúlurnar? Hvernig leiðum við þær út, ef jöfnur (1) og (2) eru notaðar sem skilgreiningar á hornaföllunum? Til þess beitum við tæknilegri brellu. Látum

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin(x+a) - \sin x \cos a - \cos x \sin a, \\ v(x) &= \cos(x+a) - \cos x \cos a + \sin x \sin a. \end{aligned}$$

Við viljum sanna, að $u(x) = 0$ og $v(x) = 0$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. Þetta jafngildir því að sanna að $f(x) = u^2(x) + v^2(x)$ sé núllfallið. Nú fæst beint úr jöfnu (3) að $u'(x) = v(x)$ og $v'(x) = -u(x)$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. En þá er $f'(x) = 2u(x)u'(x) + 2v(x)v'(x) = 0$ fyrir öll x, svo að f er fastafall. En $f(0) = 0$ og þar með er $f(x) = 0$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. Síðan má skilgreina π sem minnstu jákvæðu tölu þannig að $\cos(x/2) = 0$ og sanna, að $\sin x$ og $\cos x$ eru lotubundin með lotu 2π.

Athugasemd. Spyrja má þeirra spurninga hvort Taylor-röð falls sé almennt samleitin fyrir önnur gildi á x en $x = a$ og þá hvort summa raðarinnar sé $f(x)$. Almennt þá er svarið við báðum þessum spurningum nei. Það þarf viðbótarupplýsingar eins og í setningu 8.3.1 til að tryggja jákvætt svar.

Verkefni 8.3

1 *Skilgreinum fall $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ með því að setja*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{ef } x > 0 \\ 0, & \text{ef } x \le 0. \end{cases}$$

(a) Sýnið að fallið f sé óendanlega oft diffranlegt á öllu $\mathbb{R}$ og jafnframt að $f^{(n)}(0) = 0$, fyrir öll $n \ge 0$.

(b) Finnið Taylor-röð fallsins f í punktinum 0.

(c) Er til veldaröð $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og bil $(-\varepsilon, \varepsilon)$, þannig að um öll x úr bilinu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ gildi að $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Í dæmum 2-10 skal finna Taylor-raðir fallanna í $x = 0$.

2 $\sin 3x$

3 $\cos 4x$

4 $\cos x - e^{-4x}$

5 $\cosh x$

6 $\sinh x$

7 2^x

8 $\cos^2 x$

9 $\cos^3 x$

10 $\arcsin x$

11 *Látum α vera rauntölu. Setjum*

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \quad og \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \textit{fyrir allar heilar tölur } n \geq 1.$$

(a) Sýnið að $(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n} = \alpha\binom{\alpha}{n}$.

(b) Sýnið að röðin $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ *sé alsamleitin fyrir öll x úr opna bilinu* $(-1, 1)$.

(c) Skilgreinum fall $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ *með því að setja*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Notið niðurstöðuna úr a-lið til þess að sýna að

$$(1 + x)g'(x) = \alpha g(x).$$

(d) Ályktið út frá c-lið að

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

fyrir öll x úr bilinu $(-1, 1)$.

Kafli 9

Diffurjöfnur

9.1 Inngangur

Hugtakið diffurjafna kemur víða fyrir. Diffurjöfnur eru til að mynda mikið notaðar í stærðfræðilegum líkönum af fyrirbærum í náttúrunni. Ýmis mikilvæg lögmál náttúruvísindanna eru sett fram í jöfnum þar sem breytingarhraði kemur fyrir. Sem dæmi má taka annað hreyfingarlögmál Newtons, sem oftast er sett fram með jöfnunni $F = ma$. Það segir að kraftur sem verkar á ákveðinn hlut sé jafn margfeldinu af massa hlutarins og hröðunar hans. Ef til dæmis hlutur er í frjálsu falli þá er hröðunin a breytingarhraði fallhraðans.

Vöxtur eða hrörnun tímaháðra stærða eru oft í föstu hlutfalli við stærðina á hverjum tíma, nánar til tekið ef $f(t)$ er stærðin á tíma t þá er breytingarhraðanum lýst með jöfnu af gerðinni

$$\frac{df}{dt} = kf(t)$$

þar sem k er fasti. Um vöxt er þá að ræða ef $k > 0$ en um hrörnun ef $k < 0$. Þetta á t.d. við um innistæðu á bankareikningi, hrörnun geislavirkra efna, stofnstærðir lífvera við ákveðnar aðstæður o.fl.

Skilgreining 9.1.1. *Diffurjafna* er jafna þar sem fyrir koma óþekkt fall og ein eða fleiri af afleiðum þess.

Diffurjafna kallast *venjuleg* ef í henni koma aðeins fyrir föll af einni (og sömu) breytistærð og afleiður með tilliti til þessarar breytistærðar. Ef óþekkta fallið er fall af fleiri breytistærðum þá tölum við um *hlutafleiðujöfnu*.

Stig diffurjöfnu er stig hæstu afleiðu óþekkta fallsins sem fyrir kemur í jöfnunni.

Þegar diffurjöfnur eru settar fram er venjan að nota ritháttinn y, y', y'' *o.s.frv. fyrir óþekkta fallið og afleiður þess.*

Diffurjafnan

$$(y'')^2 + 2\sin x \cdot y' + (x+y)^2 = 0 \tag{1}$$

er venjuleg 2. stigs diffurjafna (við lítum á y *sem óþekkt fall af breytistærðinni* x*). Almenna* n*-ta stigs diffurjafnan hefur formið*

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{2}$$

þar sem F *er fall af* $n+2$ *breytistærðum. Í diffurjöfnunni (1) þá er* F *fallið sem skilgreint er sem* $F(x, u, v, w) = w^3 + 2\sin x \cdot v + (x+u)^2$.

Lausn *á (2) á bili* I *er fall* $y = \phi(x)$ *sem er* n *sinnum diffranlegt á* I *þannig að stærðin* $F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \dots, \phi^{(n)}(x))$ *er skilgreind fyrir öll* $x \in I$ *og þannig að*

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0.$$

Til dæmis eru $y = \cos x$ *og* $y = \sin x$ *lausnir á diffurjöfnunni*

$$y'' + y = 0$$

á bilinu $(-\infty, \infty)$.

Skilgreining 9.1.2. Diffurjafna af gerðinni

$$a_n(x) \cdot y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) \cdot y' + a_0 \cdot (x)y = f(x)$$

þar sem $a_0, a_1, \dots, a_n$ og f eru gefin föll á bili I er sögð vera *línuleg*. Ef f er 0-fallið er jafnan sögð *óhliðruð*, en annars *hliðruð*.

Athugasemd. Ef y_1 og y_2 eru lausnir á línulegri óhliðraðri diffurjöfnu þá er ljóst að fyrir sérhverjar tölur λ og μ er $\lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2$ líka lausn. Núllfallið er augljóslega lausn á slíkri diffurjöfnu svo við sjáum að lausnirnar mynda línulegt rúm.

Dæmi 9.1.3. Diffurjafnan

$$y''' + \exp(y') + y^3 = \sin(x \cdot y'')$$

er þriðja stigs og ólínuleg (vegna þess að $\exp(y')$ og $\sin(x \cdot y'')$ koma fyrir í henni).

Dæmi 9.1.4. Diffurjafnan

$$e^x y^{(4)} + (\tan x)y^{(3)} + (\sin x)y' + y = \sinh x$$

er hliðruð, línuleg og fjórða stigs. Óhliðraða diffurjafnan sem tilheyrir þessari diffurjöfnu er

$$e^x y^{(4)} + (\tan x)y^{(3)} + (\sin x)y' + y = 0.$$

Verkefni 9.1

Í dæmum 1-6 skal

a) *ákvarða stig diffurjöfnunnar,*

b) *segja til um hvort diffurjafnan er línuleg,*

c) *segja til um hvort diffurjafnan er hliðruð.*

1 $y' - 6y = 0$

2 $2y' = y$

3 $y' - 2y = 7x$

4 $y' \cdot y = \sin x$

5 $y''e^x - y' \sin x = y^2$

6 $y^{(4)} - x^3 y'' = e^x y$

9.2 Fyrsta stigs aðgreinanlegar diffurjöfnur

Við byrjum á fyrsta stigs diffurjöfnum sem rita má á forminu $y' = F(x, y)$. Við ætlum að skrifa $\frac{dy}{dx}$ í stað y'. Við lítum á sérstaka gerð af slíkum jöfnum.

Skilgreining 9.2.1. Fyrsta stigs diffurjafna kallast *aðgreinanleg* ef unnt er að rita hana á forminu

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot f(y). \tag{1}$$

Athugasemd. Hugmyndin að baki nafninu er sú að unnt sé að aðgreina x-ið og y-ið í jöfnunni. Diffurjafnan

$$\frac{dy}{dx} = \cos(xy)$$

er til dæmis ekki aðgreinanleg. Hugsum okkur að hægt sé að rita $\cos(xy) = f(y) \cdot g(x)$ þar sem f og g eru samfelld föll. Ef við tökum $x = 0$ þá fæst

$1 = f(y) \cdot g(0)$ og þar með hlýtur f að vera fasti. Eins fæst með því að taka $y = 0$ að g er fasti. En þar með ætti $\cos(xy)$ að vera fasti sem er fráleitt. Diffurjafnan

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$

er hins vegar aðgreinanleg vegna þess að $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.

Lítum nú á (1). Ef c er núllstöð fallsins f það er, $f(c) = 0$, þá sjáum við að fastafallið $\mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto c$ er lausn á diffurjöfnunni. Gerum nú ráð fyrir að y sé lausn á diffurjöfnunni og $f(y(x)) \neq 0$ fyrir öll x þar sem y er skilgreint. Þá uppfyllir y diffurjöfnuna

$$\frac{1}{f(y)}\frac{dy}{dx} = g(x). \tag{2}$$

Látum nú F vera stofnfall fallsins $\frac{1}{f}$ og G vera stofnfall fallsins g. Þá fæst fyrir sérhverja lausn y á (2):

$$\frac{d}{dx}F(y) = \frac{dF}{dx}(y) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(y)}\frac{dy}{dx} = g(x) = \frac{dG}{dx}(x).$$

Af þessu leiðir að sérhver lausn y á (2) uppfyllir jöfnu af taginu

$$F(y) = G(x) + C, \tag{3}$$

þar sem C er fasti. Eins sést að uppfylli y jöfnu af gerðinni (3) þá er það lausn á (2) og þar með einnig á (1). Jafna (3) er oftast rituð

$$\int \frac{1}{f(y)}\, dy = \int g(x)\, dx.$$

Dæmi 9.2.2. Leysum aðgreinanlegu diffurjöfnuna

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y.$$

Í þessu tilfelli er $g(x) = x$ og $f(y) = y$. Við sjáum að $y = 0$ er lausn. Aðrar lausnir fást með heildun:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int x\, dx \quad \text{jafngildir} \quad \ln|y| = \tfrac{1}{2}x^2 + c$$

og þar með er

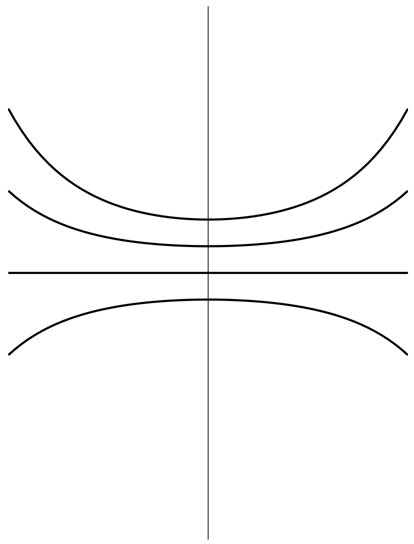
$$|y| = e^c \cdot \exp(x^2/2).$$

Lausnirnar eru því

$$y = A \cdot \exp(x^2/2), \quad A \neq 0.$$

Þar sem $A = 0$ gefur lausnina $y = 0$ þá sjáum við að allar lausnir diffurjöfnunnar eru

$$y = A \cdot \exp(x^2/2), \qquad A \text{ fasti.}$$



Mynd 9.1: Nokkrar lausnir diffurjöfnunnar $dy/dx = x \cdot y$

Dæmi 9.2.3. Leysum diffurjöfnuna

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 - y$$

Úrlausn. Deilum með x og fáum aðgreinanlegu diffurjöfnuna

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - y}{x}.$$

Jafnan $y^2 - y = y(y-1) = 0$ hefur lausnirnar $y = 0$ og $y = 1$ svo að fastaföllin $y = 0$ og $y = 1$ eru lausnir á diffurjöfnunni. Við fáum:

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\, dy = \ln|y-1| - \ln|y| + \text{fasti}$$

og

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \text{fasti}.$$

Sérhver lausn diffurjöfnunnar

$$\frac{1}{y(y-1)} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

uppfyllir því jöfnu af gerðinni

$$\ln|y-1| - \ln|y| = \ln|x| + K$$

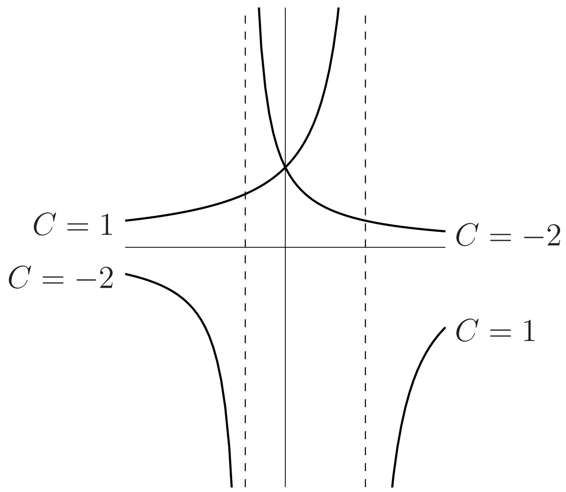
en það jafngildir

$$\frac{y-1}{y} = C \cdot x, \quad C \neq 0$$

Lausnir upphaflegu diffurjöfnunnar eru því

$$y = \frac{1}{1 - Cx} \quad \text{og} \quad y = 0. \tag{4}$$

Athugið að $C = 0$ í (4) gefur fastafallið $y = 1$ sem er lausn á diffurjöfnunni. Reyndar eru lausnirnar fleiri eins og kemur fram í meðfylgjandi athugasemd.



Mynd 9.2: Nokkrar lausnir diffurjöfnunnar $dy/dx = (y^2 - y)/x$

Athugasemd. Takið eftir að í dæmi 9.2.2 hér að framan gildir fyrir sérhvern punkt (a, b) úr $\mathbb{R}^2$ að til er nákvæmlega ein lausn y á diffurjöfnunni þannig að $y(a) = b$ það er lausnin

$$y = b \cdot e^{-a^2/2} \cdot \exp(x^2/2).$$

Skilyrði af taginu $y(a) = b$ kallast *upphafsskilyrði*. Það að finna þær lausnir ákveðinnar diffurjöfnu sem fullnægja tilteknu upphafsskilyrði kallast *upphafsgildisverkefni*. Yfirleitt er mjög mikilvægt að vita hvort til er *einkvæm* lausn á slíku verkefni, það er að segja hvort til er nákvæmlega ein lausn á verkefninu, eins og í dæmi 9.2.2.

Almennt gildir (þó svo við getum ekki sannað það í þessari bók):

Ef f hefur samfellda afleiðu á opnu bili sem inniheldur punktinn b og g er samfellt á opnu bili sem inniheldur punktinn a þá hefur upphafsgildisverkefnið

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x), \quad y(a) = b$$

einkvæma lausn, það er að segja til er opið bil sem inniheldur punktinn a þar sem nákvæmlega ein lausn diffurjöfnunnar uppfyllir skilyrðið $y(a) = b$.

Dæmi 9.2.4. Diffurjafnan

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \sqrt{|y|}$$

hefur $y = 0$ sem lausn og aðrar lausnir fást með heildun:

$$\int \frac{1}{2\sqrt{|y|}}\, dy = \int dx$$

jafngildir því að

$$\sqrt{y} = x + c \quad \text{og} \quad y > 0$$

eða

$$-\sqrt{-y} = x + c \quad \text{og} \quad y < 0$$

það er að segja

$$y = (x + c)^2 \quad \text{og} \quad x > -c$$

eða

$$y = -(x + c)^2 \quad \text{og} \quad x < -c.$$

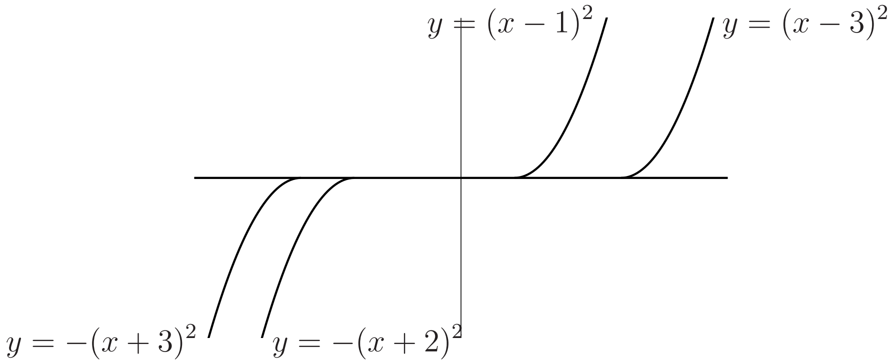
Nú sjáum við að

$$y(x) = \begin{cases} (x+c)^2 & \text{ef } x > -c \\ 0 & \text{ef } x = -c \\ -(x+c)^2 & \text{ef } x < -c \end{cases}$$

er diffranlegt fall á $(-\infty, +\infty)$ sem fullnægir diffurjöfnunni. Við sjáum líka að ef $c_1 < c_2$ þá er

$$y(x) = \begin{cases} (x+c_1)^2 & \text{ef } x > -c_1 \\ 0 & \text{ef } -c_2 \leq x \leq -c_1 \\ -(x+c_2)^2 & \text{ef } x < -c_2 \end{cases}$$

diffranlegt fall á $(-\infty, +\infty)$ sem fullnægir diffurjöfnunni. Þessar lausnir ásamt 0-lausninni eru allar lausnir á diffurjöfnunni á bilinu $(-\infty, +\infty)$.



Mynd 9.3: Lausnir á $dy/dx = 2\sqrt{|y|}$, $y(a) = 0$

Ef $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ og $b \neq 0$ þá hefur upphafsgildisverkefnið

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{|y|}, \qquad y(a) = b$$

óendanlega margar lausnir á $(-\infty, +\infty)$. Ef til dæmis $a = 0$ og $b = 1$ þá er

$$y(x) = \begin{cases} x+1 & \text{ef } x > -1 \\ 0 & \text{ef } -c \leq x \leq -1 \\ -(x+c)^2 & \text{ef } x < -c \end{cases}$$

þar sem $c > 1$, lausn á upphafsgildisverkefninu. Við sjáum hinsvegar að allar lausnir á upphafsgildisverkefninu eru eins á bilinu $(-1, +\infty)$ og þar með eins á sérhverju bili $(-\delta, \delta)$ þar sem δ er einhver talta milli 0 og 1. Þetta fyrirbæri kallast *staðbundin einkvæmni* í $a = 0$.

Athugum nú tilfellið $b = 0$. Fallið $y \mapsto 2\sqrt{|y|}$ er ekki diffranlegt í $y = 0$ og einmitt í punktum af gerðinni $(a, 0)$ bregst einkvæmnin. Látum $a \in \mathbb{R}$ og látum c_1 og c_2 vera hvaða tölur sem er þannig að $-c_1 < a < c_2$. Þá er fallið

$$y(x) = \begin{cases} (x - c_2)^2 & \text{ef } x \geq c_2 \\ 0 & \text{ef } -c_1 < x < c_2 \\ -(x + c_1)^2 & \text{ef } x \leq -c_1 \end{cases}$$

lausn á upphafsgildisverkefninu

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{|y|}, \quad y(a) = 0.$$

Við sjáum því að verkefnið hefur óendanlega margar lausnir.

Verkefni 9.2

Leysið diffurjöfnurnar í dæmum 1-15.

1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x}$

2 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y+1}{x}$

3 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$

4 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3}{y^2}$

5 $\dfrac{dy}{dx} = x^2y^2$

6 $\dfrac{dy}{dx} = x^2y$

7 $\dfrac{dy}{dx} = 1 + y^2$

8 $\dfrac{dy}{dx} = 1 - y^2$

9 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x}$

10 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$

11 $\dfrac{dy}{dx} = \sin x \cos^2 y$

12 $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + y^3 = 0$

13 $\dfrac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)$

14 $(x-1)\dfrac{dy}{dx} = xy$

15 $(x^2-4)\dfrac{dy}{dx} = y$

9.3 Línulegar fyrsta stigs diffurjöfnur

Í þessari grein munum við sýna hvernig leysa skal diffurjöfnur af taginu

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

þar sem p og q eru samfelld föll á opnu bili I.

Hugmyndin er sú að margfalda diffurjöfnuna með falli sem er hvergi núll á I þannig að vinstri hlið diffurjöfnunnar verði afleiða einhvers falls og heilda síðan.

Veljum eitthvert stofnfall fallsins p á I, köllum það F. Þá gildir

$$\left(e^{F(x)} \cdot y\right)' = e^{F(x)} \cdot F'(x) \cdot y + e^{F(x)} \cdot y' = e^{F(x)} \cdot (y' + p(x)y)$$

þar með er sýnt að y er lausn á diffurjöfnunni

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

þá og því aðeins að y sé lausn á diffurjöfnunni

$$\left(e^{F(x)} \cdot y\right)' = e^{F(x)} \cdot q(x) \tag{1}$$

En almenn lausn þessarar diffurjöfnu er greinilega

$$y = e^{-F(x)} \int q(x)e^{F(x)}\, dx.$$

Athugasemdir. (i) Fallið sem við margföldum diffurjöfnuna með kallast *heildunarþáttur* diffurjöfnunnar.
(ii) Hér ber að skilja $\int q(x)e^{F(x)}\, dx$ sem hið almenna stofnfall fallsins $q(x)e^{F(x)}$ það er að segja hvaða stofnfall fallsins $q(x)e^{F(x)}$ sem er gefur lausn.
(iii) Valið á stofnfallinu F skiptir ekki máli. Ef F og G eru stofnföll fallsins p þá er til fasti C þannig að $G(x) = F(x) + C$ fyrir öll x úr I og

$$\begin{aligned} e^{-G(x)} \int q(x)e^{G(x)}\, dx &= e^{-F(x)-C} \int q(x)e^{F(x)+C}\, dx \\ &= e^{-F(x)} \cdot e^{-C} \int q(x) \cdot e^{F(x)} \cdot e^{C}\, dx \\ &= e^{-F(x)} \int q(x)e^{F(x)}\, dx \end{aligned}$$

vegna þess að $e^{-C} \cdot e^{C} = 1$.

Dæmi 9.3.1. Finnum allar lausnir diffurjöfnunnar

$$y' + (\tan x) \cdot y = \sin x$$

á bilinu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Úrlausn.

$$\int \tan x \, dx = -\ln(\cos x) + C$$

og

$$e^{-\ln(\cos x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

Margföldum diffurjöfnuna með $\frac{1}{\cos x}$ og fáum

$$\frac{1}{\cos x} y' + \frac{1}{\cos x} \cdot (\tan x) \cdot y = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$$

sem samkvæmt reglunni um diffrun margfeldis tveggja falla jafngildir

$$\Big(\frac{1}{\cos x} y\Big)' = \tan x.$$

Þar með fæst

$$\frac{1}{\cos x} y = -\ln(\cos x) + C$$

og því

$$y = -\cos x(\ln(\cos x) - C).$$

Ef við viljum til dæmis finna þá lausn diffurjöfnunnar sem uppfyllir $y(0) = 2$ þá setjum við $x = 0$ og fáum

$$y(0) = -\cos 0(\ln(\cos 0) + C) = -C$$

og tökum því $C = -2$.

Finnum nú hvaða lausn diffurjöfnunnar

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2}$$

tekur gildið b í punkti a úr I. Samkvæmt jöfnu (1) er $e^{F(x)}y$ stofnfall fyrir $e^{F(x)}q(x)$ svo að við höfum

$$e^{F(x)}y = y(a)e^{F(a)} + \int_a^x q(t)e^{F(t)}\, dt.$$

Svo að sú lausn á diffurjöfnunni (2) *sem tekur gildið b í punkti a úr I er gefin með formúlunni*

$$y(x) = e^{-F(x)} \left(\int_a^x q(t)e^{F(t)}\, dt + b \cdot e^{F(a)} \right)$$

Dæmi 9.3.2. Leysum diffurjöfnuna

$$(\cosh x)y' + (\sinh x)y = x^3.$$

Úrlausn. Hér blasir við að $(\cosh x)y' + (\sinh x)y = ((\cosh x)y)'$ svo við þurfum ekki að nota „uppskriftina“ fyrir heildunarþáttinn heldur fáum strax

$$(\cosh x)y = \tfrac{1}{4}x^4 + C$$

og þar með

$$y = \frac{x^4 + C}{4\cosh x}.$$

Dæmi 9.3.3. Lítum á diffurjöfnuna

$$xy' + y = \cos x.$$

Líkt og í dæminu hér á undan rekum við strax augum í að $(xy)' = xy' + y$ svo almenn lausn diffurjöfnunnar er

$$y = \frac{\sin x + C}{x}.$$

Ljóst er að þessar lausnir diffurjöfnunnar eru skilgreindar á bilunum $(-\infty, 0)$ og $(0, +\infty)$. Nú er hins vegar forvitnilegt að vita hvort einhver(einhverjar) lausnanna framlengist í lausn á öllu $\mathbb{R}$. Við sjáum að fyrir $C > 0$ þá er $\lim_{x\to 0^+} \frac{C}{x} = +\infty$ en $\lim_{x\to 0^-} \frac{C}{x} = -\infty$ svo $\frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}$ hefur ekkert markgildi þegar $x \to 0$. Sama niðurstaða fæst fyrir $C < 0$. Fallið $(\sin x + C)/x$ hefur því ekkert markgildi þegar x stefnir á núll nema fyrir $C = 0$ og þá er markgildið 1. Setjum

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{ef } x \neq 0 \\ 1 & \text{ef } x = 0 \end{cases}$$

Fallið f er samfellt á öllu $\mathbb{R}$ og diffranlegt á $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Könnum nú diffranleika þess í $x = 0$.

$$\begin{aligned} f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{R}_3(x) - x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + \mathrm{R}_3(x)}{x^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Þar með er sýnt að f er diffranlegt á $\mathbb{R}$ og $f'(0) = 0$. Fyrir $x = 0$ fæst

$$0 \cdot f'(0) + f(0) = 1 = \cos(0)$$

svo að f fullnægir einnig diffurjöfnunni í $x = 0$ og þar með er f eina lausnin á diffurjöfnunni á öllu $\mathbb{R}$.

Verkefni 9.3

Leysið diffurjöfnurnar í dæmum 1-7.

1 $y' + xy = x^3$

2 $y' + \dfrac{y}{x} = 1$

3 $y' + \dfrac{3y}{x} = x^2$

4 $y' + y = e^x$

5 $y' + 2e^x y = e^x$

6 $y' + 2y = x$

7 $y' + (\sin x)y = \sin x$

Leysið upphafsgildisverkefnin í dæmum 8-12.

8 $\dfrac{dy}{dt} + 9y = 1, \quad y(1) = -1$

9 $\dfrac{dy}{dx} + 4x^3 y = x^3, \quad y(0) = 1$

10 $\dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = 2xe^{-\sin x}, \quad y(\pi) = 1$

11 $\dfrac{dy}{dx} + 9y = 1, \quad y(1) = -1$

12 $\dfrac{dy}{dt} + (\cosh x)y = e^{-\sinh x}, \quad y(0) = 2$

13 *Finnið lausnir diffurjöfnunnar*

$$(1+x)y' + (1-x)y = e^x.$$

Er til lausn á öllu $\mathbb{R}$*?*

9.4 Tvinntölugild föll

Í greinum 9.5 og 9.6 munum við fjalla um annars stigs diffurjöfnur með föstum stuðlum. En áður en við getum tekið til við það viðfangsefni þurfum við að fjalla um föll sem taka gildi sín í $\mathbb{C}$*, svokölluð* tvinntölugild föll*, og er þessi grein helguð þeim.*

Látum I *vera opið bil í* $\mathbb{R}$ *og* $f : I \to \mathbb{C}$ *vera fall. Þá er hægt að skrifa á nákvæmlega einn hátt*

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x) \qquad \textit{fyrir öll } x \textit{ úr } I$$

þar sem $f_1 : I \to \mathbb{R}$ *og* $f_2 : I \to \mathbb{R}$*. Nánar tiltekið er*

$$f_1(x) = \tfrac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)}) \quad \textit{og} \quad f_2(x) = \tfrac{1}{2i}(f(x) - \overline{f(x)}).$$

Fallið f_1 *er oft táknað með* $\operatorname{Re} f$ *og kallast* raunhluti *fallsins* f *og fallið* f_2 *er oft táknað með* $\operatorname{Im} f$ *og kallast* þverhluti *fallsins* f*.*

Skilgreining 9.4.1. Látum f vera tvinntölugilt fall á opnu bili I og skrifum

$$f = f_1 + if_2,$$

með $f_1 = \operatorname{Re} f$ og $f_2 = \operatorname{Im} f$.

(i) Við segjum að f sé *diffranlegt í punkti* x úr I ef f_1 og f_2 eru diffranleg í punktinum x og setjum

$$f'(x) = {f_1}'(x) + i{f_2}'(x).$$

Eins segjum við að f sé *diffranlegt á bilinu* I ef f_1 og f_2 eru það.

(ii) Við segjum að fall

$$F : I \to \mathbb{C}, F = F_1 + iF_2,$$

sé *stofnfall fallsins* f ef fyrir öll x úr I gildir að $F'(x) = f(x)$, það er að segja ${F_1}'(x) = f_1(x)$ og ${F_2}'(x) = f_2(x)$.

Skilgreining 9.4.2. Við framlengjum veldisvísisfallið á alla tvinntölusléttuna með eftirfarandi hætti

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; x + iy \mapsto e^x(\cos y + i \sin y).$$

Eins og áður skrifum við jöfnum höndum e^{x+iy} og $\exp(x + iy)$.

Athugasemd. Í grein 9.8 í þessum kafla munum við sýna að þetta er „hin eðlilega framlenging“ veldisvísisfallsins.

Setning 9.4.3. *Látum a og b vera rauntölur og $\omega = a + ib$. Fallið*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}; x \mapsto e^{\omega x} = e^{ax}(\cos(bx) + i \sin(bx))$$

er diffranlegt og $f'(x) = \omega \cdot f(x)$.

Sönnun. $f(x) = e^{ax}(\cos(bx) + i \sin(bx))$ svo ljóst er að $\operatorname{Re} f$ og $\operatorname{Im} f$ eru diffranleg föll og því einnig fallið f. Ennfremur gildir

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(e^{ax}\cos(bx)) + i\frac{d}{dx}(e^{ax}\sin(bx)) \\
&= ae^{ax}\cos(bx) - be^{ax}\sin(bx) + i(ae^{ax}\sin(bx) + be^{ax}\cos(bx)) \\
&= (a + ib)(e^{ax}\cos(bx) + ie^{ax}\sin(bx)) \\
&= \omega e^{\omega x} \\
&= \omega \cdot f(x).
\end{aligned}$$

□

Dæmi 9.4.4. Reiknum $\displaystyle\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$, þar sem a og b eru úr $\mathbb{R}$.

Úrlausn. Af setningunni hér að ofan leiðir að $\frac{d}{dx}(\frac{1}{\omega}e^{\omega x}) = e^{\omega x}$ fyrir sérhvert ω úr $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Við fáum því:

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\sin(bx)\,dx &= \int \mathrm{Im}(e^{(a+ib)x})\,dx \\
&= \mathrm{Im}\left(\int e^{(a+ib)x}\,dx\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x}\right) + C \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{ax}(\cos(bx)+i\sin(bx))\right) + C \\
&= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + C.
\end{aligned}$$

Á sama hátt fæst einnig að

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\cos(bx)\,dx &= \mathrm{Re}\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{ax}(\cos(bx)+i\sin(bx))\right) + C \\
&= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx)) + C.
\end{aligned}$$

Setning 9.4.5. *Látum ω vera tvinntölu. Almenn tvinntölugild lausn diffurjöfnunnar*

$$y' - \omega y = 0$$

er $y = A \cdot e^{\omega x}$ þar sem A er tvinntölufasti.

Sönnun. (i) Samkvæmt setningu 9.4.3 gildir

$$\frac{d}{dx}(Ae^{\omega x}) - \omega Ae^{\omega x} = A\omega e^{\omega x} - \omega Ae^{\omega x} = 0$$

svo að föll af taginu $y = Ae^{\omega x}$ eru lausnir diffurjöfnunnar.

(ii) Gerum ráð fyrir að $f(x)$ sé lausn á diffurjöfnunni, á opnu bili. Þá fæst

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f(x)\cdot e^{-\omega x}) &= f'(x)\cdot e^{-\omega x} + f(x)(-\omega e^{-\omega x}) \\
&= \omega f(x)e^{-\omega x} - \omega f(x)e^{-\omega x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

fyrir öll x úr I. Af þessu leiðir að til er A úr $\mathbb{C}$ þannig að $f(x)e^{-\omega x} = A$ og þar með $f(x) = Ae^{\omega x}$ fyrir öll x úr I.

□

Athugasemd. Í síðari hluta sönnunarinnar hér að ofan gengum við út frá að tvær reglur giltu um afleiður tvinntölugildra falla:

(i) Ef um diffranlegt tvinntölugilt fall f á opnu bili I gildir að $f'(x) = 0$ fyrir öll x úr I þá er f fastafall.

(ii) Ef f og g eru tvinntölugild föll á opnu bili sem bæði eru diffranleg í punkti a á bilinu, þá er fallið $f \cdot g$ líka diffranlegt í punktinum a og afleiða þess er gefin með formúlunni

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Báðar þessar reglur er einfalt að sanna og er það eftirlátið lesendum.

Verkefni 9.4

1 *Sýnið að* $e^z \neq 0$ *fyrir allar tvinntölur* z.

2 *Finnið allar tvinntölur* z *þannig að* $e^z = 1$.

3 *Sýnið að um allar rauntölur* t *gildi*

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \textit{og} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

og notið það síðan til að leiða út formkornin

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2} \quad \textit{og} \quad \sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}.$$

4 *Látum* I *vera opið bil í* $\mathbb{R}$ *og* $f : I \to \mathbb{C}$ *vera diffranlegt fall þannig að* $f'(x) = 0$ *fyrir öll* x *úr* I. *Sýnið að* f *sé fastafall.*

5 *Látum* f *og* g *vera tvinntölugild föll á opnu bili sem bæði eru diffranleg í punkti* a *á bilinu. Sýnið að þá sé fallið* $f \cdot g$ *einnig diffranlegt í punktinum* a *og jafnframt gildi*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

6 *Látum* m *og* n *vera heilar tölur. Sannið að*

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx}\, dx = \begin{cases} 0 & \textit{ef } \ m \neq n \\ 2\pi & \textit{ef } \ m = n. \end{cases}$$

7 *Ályktið út frá dæmi 6 að um allar heilar tölur* m *og* n *þannig að* $m^2 \neq n^2$ *gildi*

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(mx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0.$$

Sýnið einnig að um allar heilar tölur n *gildi*

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi$$

9.5 Óhliðraðar línulegar annars stigs diffurjöfnur með föstum stuðlum

Í þessari grein ætlum við að leysa diffurjöfnur af gerðinni

$$y'' + ay' + by = 0$$

þar sem a *og* b *eru rauntölufastar. Nánar tiltekið ætlum við að finna öll tvídiffranleg föll* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sem uppfylla diffurjöfnuna. Reyndar kemur í ljós að sérhver lausn slíkrar diffurjöfnu á opnu bili framlengist sjálfkrafa í lausn á öllu* $\mathbb{R}$ *(samanber setningu 9.4.5). En áður en við snúum okkur að þessu verkefni sönnum við „hjálparsetningu" sem segir til um hver er hin almenna* tvinntölugilda *lausn diffurjöfnu af þessari gerð.*

Skilgreining 9.5.1. Jafnan

$$t^2 + at + b = 0$$

kallast *kennijafna* diffurjöfnunnar

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Margliðan $t^2 + at + b$ *er þáttanleg yfir* $\mathbb{C}$ *það er að segja til eru tvinntölur* α *og* β *(hugsanlega sama talan) þannig að* $t^2 + at + b = (t - \alpha)(t - \beta)$*.*

Setning 9.5.2. *Almenn tvinntölugild lausn diffurjöfnunnar*

$$y'' + ay' + by = 0$$

er

$$y = \begin{cases} Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} & \text{ef } \alpha \neq \beta \\ Axe^{\alpha x} + Be^{\alpha x} & \text{ef } \alpha = \beta \end{cases}$$

þar sem A og B eru tvinntölufastar og α og β eru rætur kennijöfnunnar $t^2 + at + b = 0$.

Sönnun. Tökum eftir að $t^2 + at + b = (t - \alpha)(t - \beta)$ jafngildir því að

$$a = -(\alpha + \beta) \quad \text{og} \quad b = \alpha\beta.$$

Af því leiðir að

$$\begin{aligned}(y' - \beta y)' - \alpha(y' - \beta y) &= y'' - \beta y' - \alpha y' + \alpha\beta y \\ &= y'' - (\beta + \alpha)y' + \alpha\beta y \\ &= y'' + ay' + by.\end{aligned}$$

Við sjáum því að fall f á opnu bili I er lausn á diffurjöfnunni

$$y'' + ay' + by = 0$$

þá og því aðeins að fallið $f' - \beta \cdot f$ sé lausn á diffurjöfnunni

$$y' - \alpha y = 0 \tag{1}$$

Samkvæmt setningu 9.4.5 er fallið $f' - \beta f$ lausn á (1) þá og því aðeins að til sé fasti C úr $\mathbb{C}$ þannig að

$$f'(x) - \beta f(x) = C \cdot e^{\alpha x} \qquad \text{fyrir öll } x \text{ úr } I. \tag{2}$$

Margföldum (2) með $e^{-\beta x}$ og fáum

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot e^{-\beta x}) = Ce^{\alpha x} \cdot e^{-\beta x} = Ce^{(\alpha - \beta)x} \qquad \text{fyrir öll } x \text{ úr } I$$

og þar með

$$f(x) \cdot e^{-\beta x} = \begin{cases} \frac{C}{\alpha - \beta} \cdot e^{(\alpha - \beta)x} + B & \text{ef } \alpha \neq \beta \\ Cx + B & \text{ef } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Með því að margfalda með $e^{\beta x}$ fáum við að almenn lausn diffurjöfnunnar

$$y'' + ay' + by = 0$$

á bilinu I er

$$y = \begin{cases} Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} & \text{ef } \alpha \neq \beta \\ Axe^{\alpha x} + Be^{\alpha x} & \text{ef } \alpha = \beta \end{cases}$$

þar sem A og B eru tvinnfölufastar. Ljóst er að slík föll framlengjast sjálfkrafa í lausnir á öllu $\mathbb{R}$. □

Athugasemd. Athugið að ofangreind setning er aðeins hjálparsetning. Það sem við höfum raunverulega áhuga á er að finna almenna *raungilda* lausn diffurjöfnu af gerðinni

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad a \text{ og } b \text{ úr } \mathbb{R} \tag{3}$$

og héðan í frá mun *almenn lausn* slíkrar diffurjöfnu ávallt þýða *almenn raungild lausn* hennar. Ber að hafa þetta hugfast í framhaldinu. Áður en við snúum okkur að því að finna almenna lausn á diffurjöfnu af gerðinni (3) skulum við líta nánar á rætur kennijöfnunnar. Skrifum

$$t^2 + at + b = (t - \alpha)(t - \beta).$$

Nákvæmlega þrjú tilfelli geta komið upp.

(i) $\alpha \neq \beta$ og $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(ii) $\alpha = \beta$ og $\alpha \in \mathbb{R}$.
(iii) $\alpha \notin \mathbb{R}$ og $\beta = \overline{\alpha}$.

Setning 9.5.3. *Látum a og b vera rauntölur og α og β vera rætur kennijöfnunnar $t^2 + at + b = 0$ það er að segja*

$$t^2 + at + b = (t - \alpha)(t - \beta).$$

Þá gildir um diffurjöfnuna

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{4}$$

(i) *Ef $\alpha \neq \beta$ og $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ þá er almenn lausn á* (4)

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} \qquad \text{með } A \text{ og } B \text{ úr } \mathbb{R}. \tag{5}$$

(ii) *Ef $\alpha = \beta$ og $\alpha \in \mathbb{R}$ þá er almenn lausn á* (4)

$$y = Axe^{\alpha x} + Be^{\beta x} \qquad \textit{með } A \textit{ og } B \textit{ úr } \mathbb{R}. \tag{6}$$

(iii) *Ef $\alpha = \lambda + i\mu$ og $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$, þá er almenn lausn á* (4)

$$y = Ae^{\lambda x}\cos\mu x + Be^{\lambda x}\sin\mu x \qquad \textit{með } A \textit{ og } B \textit{ úr } \mathbb{R}. \tag{7}$$

Sönnun. (i) Samkvæmt setningu 9.5.2 er ljóst að föll af gerðinni (5) eru lausnir á (4). Gerum nú ráð fyrir að y sé raungild lausn á (4). Samkvæmt síðustu setningu eru þá til A og B úr $\mathbb{C}$ þannig að

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$$

og þar sem y er raungild lausn þá eru A og B úr $\mathbb{R}$.
(ii) Alveg hliðstætt tilfelli (i).
(iii) Almenna tvinntölugilda lausnin á (4) er

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$$

þar sem $\alpha = \lambda + i\mu$ og $\beta = \lambda - i\mu$, þ.e.a.s.

$$y = Ae^{\lambda x}(\cos\mu x + i\sin\mu x) + Be^{\lambda x}(\cos\mu x - i\sin\mu x).$$

Með því að setja $A = B = 1/2$ og síðan $A = -B = 1/(2i)$ þá sést að $e^{\lambda x}\cos\mu x$ og $e^{\lambda x}\sin\mu x$ eru líka lausnir og þar með eru allar lausnir líka samantekt þessara tveggja falla. Raungildar lausnir fást svo með því að velja rauntölustuðla.

□

Síðasta setning gefur beinlínis forskrift að almennri lausn óhliðraðrar annars stigs diffurjöfnu með föstum stuðlum. Lítum á nokkur dæmi.

Dæmi 9.5.4. Leysum diffurjöfnuna

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Úrlausn. Kennijafnan er

$$t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2) = 0.$$

Almenn lausn diffurjöfnunnar er því

$$y = Ae^{x} + Be^{2x} \qquad \text{með } A \text{ og } B \text{ úr } \mathbb{R}.$$

Dæmi 9.5.5. Leysum diffurjöfnuna

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Úrlausn. Kennijafnan er

$$t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0.$$

Almenn lausn diffurjöfnunnar er því

$$y = Axe^{2x} + Be^{2x} \qquad \text{með } A \text{ og } B \text{ úr } \mathbb{R}.$$

Dæmi 9.5.6. Leysum diffurjöfnuna

$$y'' + y' + 7y = 0$$

Úrlausn. Kennijafnan er

$$t^2 + t + 7 = (t + \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{27}{4} = 0.$$

Hún hefur ræturnar $t = -\frac{1}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ og $t = -\frac{1}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Almenn lausn diffurjöfnunnar er því

$$y = Ae^{-x/2}\cos(\tfrac{3\sqrt{3}}{2}x) + Be^{-x/2}\sin(\tfrac{3\sqrt{3}}{2}x) \qquad \text{með } A \text{ og } B \text{ úr } \mathbb{R}.$$

Setning 9.5.7. *Látum a og b vera rauntölur og x_0 vera ákveðinn punkt úr $\mathbb{R}$. Þá gildir, fyrir hvaða c og d úr $\mathbb{R}$ sem er, að til er nákvæmlega ein lausn á diffurjöfnunni*

$$y'' + ay' + by = 0$$

sem uppfyllir $y(x_0) = c$ og $y'(x_0) = d$.

Sönnun. Athugum tilfellið þegar kennijafnan hefur tvöfalda rót það er að segja

$$t^2 + at + b = (t - \alpha)^2.$$

Þá er almenn lausn diffurjöfnunnar

$$y = Axe^{\alpha x} + Be^{\alpha x} \qquad \text{með } A \text{ og } B \text{ úr } \mathbb{R}.$$

Við viljum sýna að til sé nákvæmlega ein talnatvennd (A, B) þannig að

$$y(x_0) = Ax_0e^{\alpha x_0} + Be^{\alpha x_0} = c$$

og

$$y'(x_0) = Ae^{\alpha x_0} + A\alpha x_0 e^{\alpha x_0} + B\alpha e^{\alpha x_0} = d.$$

Það jafngildir því að jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} Ax_0 + B &= ce^{-\alpha x_0} \\ A(1+\alpha x_0) + B\alpha &= de^{-\alpha x_0} \end{aligned}$$

hafi nákvæmlega eina lausn. En sú er raunin vegna þess að

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ 1+\alpha x_0 & \alpha \end{pmatrix} = x_0\alpha - (1+\alpha x_0) = -1 \neq 0.$$

Hin tilfellin eru sönnuð á svipaðan hátt. □

Athugasemd. Setninguna má orða svo að upphafsgildisverkefnið

$$y'' + ay' + by = 0, \qquad y(x_0) = c \text{ og } y'(x_0) = d$$

hafi einkvæma lausn. Sérstaklega gildir því að ef y er lausn þar sem $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ þá er $y(x) = 0$ fyrir öll x.

Dæmi 9.5.8. Leysum upphafsgildisverkefnið

$$y'' + y' + 7y = 0, \quad y(0) = 1 \quad \text{og} \quad y'(0) = 2.$$

Úrlausn. Í dæmi 9.5.6 sáum við að almenn lausn diffurjöfnunnar er

$$y = Ae^{-x/2}\cos(\tfrac{3\sqrt{3}}{2}x) + Be^{-x/2}\sin(\tfrac{3\sqrt{3}}{2}x) \qquad \text{með } A \text{ og } B \text{ úr } \mathbb{R}.$$

Skilyrðið $y(0) = 1$ gefur $A = 1$ og skilyrðið $y'(0) = 2$ gefur $-\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}B = 2$ og þar með $B = \frac{5}{3\sqrt{3}}$. Umbeðin lausn er því

$$y = e^{-x/2}\cos(\tfrac{3\sqrt{3}}{2}x) + \tfrac{5}{3\sqrt{3}}e^{-x/2}\sin(\tfrac{3\sqrt{3}}{2}x).$$

Verkefni 9.5

Leysið óhliðruðu línulegu diffurjöfnurnar í dæmum 1-4.

1 $y'' + 44y = 0$

2 $y'' - y = 0$

3 $y'' + y' - 6y = 0$

4 $y'' - 3y' + 2y = 0$

Leysið upphafsgildisverkefnin í dæmum 5-8.

5 $y'' + 3y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$

6 $2y'' + 5y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

7 $y'' - 8y' + 16y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 4$

8 $y'' - y' + y = 0, \quad y(\pi/\sqrt{3}) = 0, y'(\pi/\sqrt{3}) = 3$

9.6 Hliðraðar línulegar annars stigs diffurjöfnur með föstum stuðlum.

Í þessari grein ætlum við að fjalla um lausnir á diffurjöfnum af gerðinni

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{1}$$

þar sem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *er fall af tiltölulega einfaldri gerð.*

Ef y_1 *og* y_2 *eru lausnir á* (1) *þá fæst*

$$\begin{aligned}
&(y_2 - y_1)'' + a(y_2 - y_1)' + b(y_2 - y_1) \\
= \, &{y_2}'' + a{y_2}' + by_2 - ({y_1}'' + a{y_1}' + by_1) \\
= \, &f(x) - f(x) = 0,
\end{aligned}$$

svo $Y = y_2 - y_1$ *er lausn á óhliðruðu jöfnunni. Einnig sjáum við að ef* Y *er lausn á óhliðruðu jöfnunni og* y_1 *er lausn á* (1) *þá fæst*

$$\begin{aligned}
&(Y + y_1)'' + a(Y + y_1)' + b(Y + y_1) \\
= \, &Y'' + aY' + bY + {y_1}'' + a{y_1}' + by_1 \\
= \, &0 + f(x) = f(x)
\end{aligned}$$

það er að segja $Y + y_1$ *er lausn á* (1). *Við höfum því sýnt að almenn lausn á* (1) *fæst með því að finna einhverja lausn á* (1) *og bæta henni við almennu lausnina á óhliðruðu jöfnunni.*

Í síðustu grein sýndum við hvernig unnt er að leysa óhliðruðu jöfnuna svo vandinn sem við höfum við að glíma hér er að finna eina sérlausn. *Við látum okkur hins vegar nægja að sýna hér hvernig hægt er að finna sérlausn þegar* $f(x)$ *er línuleg samantekt falla af gerðinni* $p(x)\cos(kx)e^{mx}$ *og* $p(x)\sin(kx)e^{mx}$ *þar sem* p *er margliða og* k *og* m *eru fastar.*

Setning 9.6.1. *Látum* $p(x)$ *vera margliðu af stigi* n*. Þá er til margliða* $q(x)$ *þannig að*

$$q''(x) + aq'(x) + bq(x) = p(x)$$

Ef $b \neq 0$ *þá er* $\operatorname{stig} q = n$*. Ef* $b = 0$ *og* $a \neq 0$ *þá er* $\operatorname{stig} q = n+1$*. Ef* $a = b = 0$ *þá er* $\operatorname{stig} q = n + 2$*.*

Sönnun. Stuðlar óþekktu margliðunnar q fást sem lausn á mjög einföldu línulegu jöfnuhneppi. □

Athugasemd. Þó svo við höfum ekki áhuga á því á þessu stigi þá er rétt að benda á að setningin er rétt fyrir margliður $p(x)$ sem hafa tvinntölustuðla og þá verður sérlausnin $q(x)$ líka með tvinntölustuðla. Sönnunin er eins.

Dæmi 9.6.2. Leysum upphafsgildisverkefnið

$$y'' - 2y' + 2y = x^3 - 2x, \quad y(0) = 1 \quad \text{og} \quad y'(0) = 0.$$

Úrlausn. Finnum fyrst sérlausn af gerðinni

$$q(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Við fáum

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 2y &= 6a_3x + 2a_2 - 2(3a_3x^2 + 2a_2x + a_1) \\ &\quad + 2(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) \\ &= 2a_3x^3 + (2a_2 - 6a_3)x^2 \\ &\quad + (2a_1 - 4a_2 + 6a_3)x + 2a_2 - 2a_1 + 2a_0 \\ &= x^3 - 2x. \end{aligned}$$

Með því að bera saman stuðla fæst að $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$ og $a_0 = -1$ þar með er

$$q(x) = \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x - 1.$$

Kennijafnan er $t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1 = 0$ og hefur lausnirnar $t = 1 + i$ og $t = 1 - i$. Almenn lausn óhliðruðu jöfnunnar er því

$$y = Ae^x \cos x + Be^x \sin x.$$

Almenn lausn upphaflegu diffurjöfnunnar fæst með því að bæta sérlausninni við almennu lausn óhliðruðu jöfnunnar, það er

$$\begin{aligned} y &= Ae^x \cos x + Be^x \sin x \\ &\quad + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x - 1. \end{aligned}$$

Nú fæst $y(0) = A - 1 = 1$ og því $A = 2$ og $y'(0) = 2 + B + \frac{1}{2} = 0$ og því $B = -\frac{5}{2}$. Lausnin á upphafsgildisverkefninu er því

$$y = 2e^x \cos x - \tfrac{5}{2}e^x \sin x + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x - 1.$$

Setning 9.6.3. *Látum $p(x)$ vera margliðu og m vera fasta. Þá hefur diffurjafnan*

$$y'' + ay' + by = p(x)e^{mx} \tag{2}$$

sérlausn af gerðinni $y = q(x) \cdot e^{mx}$ þar sem $q(x)$ er margliða.

Sönnun. Setjum $y(x) = u(x) \cdot e^{mx}$ inn í (2) og fáum

$$\begin{aligned} &(ue^{mx})'' + a(ue^{mx})' + b(ue^{mx}) \\ &\qquad = u''e^{mx} + (2m + a)u'e^{mx} + (m^2 + am + b)ue^{mx} \\ &\qquad = p(x)e^{mx} \end{aligned}$$

sem jafngildir ($e^{mx} \neq 0$ fyrir öll x)

$$u'' + (2m + a)u' + (m^2 + am + b)u = p(x). \tag{3}$$

En samkvæmt setningu 9.6.1 hefur (3) sérlausn sem er margliða. $\square$

Athugasemd. Auðséð er að setningin er rétt þó svo a, b og m væru tvinntölur og $p(x)$ hefði tvinntölustuðla (sjá athugasemd við síðustu setningu).

Dæmi 9.6.4. Leysum diffurjöfnuna

$$y'' - 2y' + y = xe^x. \tag{4}$$

Úrlausn. Setjum $y = ue^x$ inn í (4) og fáum

$$u'' - (2 \cdot 1 - 2)u' + (1^2 - 2 \cdot 1 + 1)u = u'' = x.$$

Fallið $x \mapsto \frac{1}{6}x^3e^x$ er því sérlausn. Kennijafnan er

$$t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 = 0$$

svo að almenn lausn óhliðruðu diffurjöfnunnar er

$$y = Axe^x + Be^x$$

og þar með er almenn lausn á (4)

$$y = Axe^x + Be^x + \tfrac{1}{6}x^3e^x.$$

Setning 9.6.5. (i) *Látum $p(x)$ vera margliðu og m og k vera fasta. Þá hefur diffurjafnan*

$$y'' + ay' + by = p(x)\cos(kx)e^{mx} \tag{5}$$

sérlausn af gerðinni

$$y = q(x)\cos(kx)e^{mx} + r(x)\sin(kx)e^{mx}$$

þar sem $q(x)$ og $r(x)$ eru margliður.
(ii) *Sama gildir ef við höfum $p(x)\sin(kx)e^{mx}$ í stað $p(x)\cos(kx)e^{mx}$ í hægri hlið diffurjöfnunnar.*

Sönnun. (i) Setjum $\omega = m + ik$. Þá gildir að

$$p(x)\cos(kx)e^{mx} = \mathrm{Re}(p(x)e^{\omega x}).$$

Finnum nú tvinntölugilda sérlausn Y á diffurjöfnunni

$$y'' + ay' + by = p(x)e^{\omega x}. \tag{6}$$

Setjum $Y(x) = U(x)e^{\omega x}$. Þá fæst með innsetningu (eins og í síðustu sönnun)

$$U'' + (2\omega + a)U' + (\omega^2 + a\omega + b)U = p(x).$$

En þessi diffurjafna hefur sérlausn $Q(x)$ sem er margliða með *tvinntölustuðlum* (samanber athugasemd við síðustu setningu). Þar með er $Y(x) = Q(x)e^{\omega x}$ sérlausn á (6) og $y(x) = \mathrm{Re}(Q(x)e^{\omega x})$ sérlausn á (5). Kljúfum $Q(x)$ í raunhluta og þverhluta og ritum $Q(x) = Q_1(x) + iQ_2(x)$. Þá sést að

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(Q(x)e^{\omega x}) &= \mathrm{Re}((Q_1(x) + iQ_2(x))e^{mx}(\cos(kx) + i\sin(kx))) \\ &= Q_1(x)\cos(kx)e^{mx} - Q_2(x)\sin(kx)e^{mx}.\end{aligned}$$

(ii) Sannað á sama hátt.

□

Dæmi 9.6.6. Leysum diffurjöfnuna

$$y'' + y' + y = e^x(\cos x + \sin x).$$

Úrlausn. Höfum að $e^x \cos x = \mathrm{Re}(e^{(1+i)x})$ og $e^x \sin x = \mathrm{Im}(e^{(1+i)x})$. Setjum $Y(x) = U(x)e^{(1+i)x}$ og fáum með innsetningu diffurjöfnuna

$$U'' + (3+2i)U' + (2+3i)U = 1.$$

Fastamargliðan $Q(x) = \frac{1}{2+3i}$ er lausn á þessari diffurjöfnu svo að

$$Y(x) = Q(x)e^{(1+i)x} = \tfrac{2-3i}{13}e^{(1+i)x}$$

er sérlausn á diffurjöfnunni

$$y'' + y' + y = e^{(1+i)x}.$$

Þar með er

$$y_1(x) = \mathrm{Re}\, Y(x) = e^x(\tfrac{2}{13}\cos x + \tfrac{3}{13}\sin x)$$

sérlausn á diffurjöfnunni

$$y'' + y' + y = e^x \cos x$$

og

$$y_2(x) = \mathrm{Im}\, Y(x) = e^x(-\tfrac{3}{13}\cos x + \tfrac{2}{13}\sin x)$$

sérlausn á diffurjöfnunni

$$y'' + y' + y = e^x \sin x.$$

Af þessu leiðir að

$$y_1(x) + y_2(x) = \frac{e^x}{13}(5\sin x - \cos x)$$

er sérlausn á upphaflegu diffurjöfnunni. Kennijafnan

$$t^2 + t + 1 = (t + \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}$$

hefur lausnirnar $t = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ og $t = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Almenn lausn óhliðruðu jöfnunnar er þá

$$y = Ae^{-x/2}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) + Be^{-x/2}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)$$

og þar með er almenn lausn upphaflegu diffurjöfnunnar

$$y = Ae^{-x/2}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) + Be^{-x/2}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) + \tfrac{e^x}{13}(5\sin x - \cos x).$$

Athugasemd. Aðferðina sem beitt er í dæminu hér á undan má nota til að finna sérlausn á diffurjöfnu af gerðinni

$$y'' + ay' + by = f_1 + f_2 \tag{7}$$

þar sem hægri hliðin er summa tveggja falla. Fundnar eru sérlausnirnar Y_1 og Y_2 á diffurjöfnunum

$$y'' + ay' + by = f_1 \quad \text{og} \quad y'' + ay' + by = f_2.$$

Þá er $Y_1 + Y_2$ sérlausn á (7).

Verkefni 9.6

Finnið almennar lausnir á diffurjöfnunum í dæmum 1-5.

1 $y'' + y' - 6y = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$

2 $y'' + y' - 2y = e^x$

3 $y'' + y = sinx$

4 $y'' + 4y = \sin x \cos x$

5 $y'' - y' - 2y = 2e^{2x}\sin x$

6 *Leysið diffurjöfnuna*

$$y'' - y = \sin x + x$$

og sannreynið með innsetningu að rétt hafi verið reiknað. Finnið síðan lausn sem fullnægir skilyrðinu

$$\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^2} = 0$$

9.7 Einsleitar fyrsta stigs diffurjöfnur

Skilgreining 9.7.1. Við segjum að fall f af tveimur breytistærðum x og y sé *einsleitt* ef fyrir sérhvern punkt (x, y) þannig að f er skilgreint í (tx, ty) fyrir sérhvert $t \neq 0$, gildir að

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Dæmi 9.7.2. Föllin

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\} \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto \frac{y - x}{y + x},$$
$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 0\} \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto \left(\frac{x^2 + y^2}{yx}\right)^3,$$
$$\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto \exp\left(\frac{x^3 y}{x^4 + y^4}\right)$$

eru öll einsleit.

Skilgreining 9.7.3. Diffurjafna af gerðinni

$$y' = f(x, y)$$

þar sem f er einsleitt fall kallast *einsleit diffurjafna.*

Tökum eftir að fyrir $x \neq 0$ þá fæst með því að taka $t = \frac{1}{x}$

$$y' = f(x, y) = f(1, \frac{y}{x}).$$

Setjum $v = \frac{y}{x}$. Þá fæst

$$y' = (v \cdot x)' = v'x + v = f(1, v)$$

og því

$$x\frac{dv}{dx} = f(1, v) - v.$$

En síðasta diffurjafnan er aðgreinanleg. Lítum á dæmi.

Dæmi 9.7.4. Leysum diffurjöfnuna

$$y' = 1 + \frac{y}{x}.$$

Úrlausn. Setjum $v = \frac{y}{x}$ og fáum

$$x\frac{dv}{dx} = 1 + v - v = 1$$

og þar með

$$\int dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

sem gefur $v = \ln|x| + c$. Setjum $\frac{y}{x}$ inn í stað v og fáum

$$y = x(\ln|x| + c).$$

Dæmi 9.7.5. Leysum diffurjöfnuna

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Úrlausn. Fyrir $x > 0$ gildir

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Setjum $v = \frac{y}{x}$ og fáum

$$x\frac{dv}{dx} = v + \sqrt{1 + v^2} - v = \sqrt{1 + v^2}$$

og þar með

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

sem gefur $\operatorname{Arsinh} v = \ln x + c$ og því

$$v = \sinh(\ln x + c) = \frac{e^{\ln x + c} - e^{-\ln x - c}}{2} = \frac{1}{2}(e^c x - e^{-c}\frac{1}{x}).$$

Almenn lausn diffurjöfnunnar fyrir $x > 0$ er þá

$$v = \tfrac{1}{2}(k \cdot x - \frac{1}{k \cdot x}) \qquad \text{með } k > 0.$$

Með því að setja $\frac{y}{x}$ inn í stað v fæst

$$y = \tfrac{1}{2}(kx^2 - \frac{1}{k}) \qquad \text{með } k > 0$$

Fyrir $x < 0$ gildir
$$y' = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}.$$
Setjum $v = \frac{y}{x}$ og fáum með samskonar reikningum og áður að
$$v = \sinh(\ln|x| + c) = \tfrac{1}{2}(\frac{1}{k\,|x|} - k\,|x|) \qquad \text{með } k = e^{-c} > 0.$$
Af þessu leiðir að
$$y = xv = \tfrac{1}{2}(\frac{x}{k\,|x|} - kx\,|x|) = \tfrac{1}{2}(kx^2 - \frac{1}{k}) \qquad \text{með } k > 0.$$
Fljótséð er að fyrir hvaða $k > 0$ sem er gildir að
$$y = \tfrac{1}{2}(kx^2 - \frac{1}{k})$$
er lausn á upphaflegu diffurjöfnunni á öllu $\mathbb{R}$.

Verkefni 9.7

1 *Í stöðuvatni er árlegt innrennsli þriðjungur af vatnsmagni stöðuvatnsins og útrennsli hið sama. Í stöðuvatninu eru eiturefni, 0,05 mg/l. Vegna hreinsunar minnkar magn eiturefna í innrennsli í 0,01 mg/l. Eftir hve mörg ár hefur magn eiturefna í vatninu minnkað um helming?*

2 *Finnið lausn á diffurjöfnunni*
$$xy' - 2y = 4x^3y^{1/2}$$
á öllu $\mathbb{R}$ *sem fullnægir upphafskilyrðinu* $y(1) = 1$. $\big[$*Ábending: Margfaldið með* $y^{-1/2}$.$\big]$

3 *Látum* $x = e^z$. *Sýnið að sérhver lausn á diffurjöfnuni* $4x^2y'' + y = 0$, $x > 0$ *sé lausn á diffurjöfnunni*
$$\frac{4d^2y}{dz^2} - \frac{4dy}{dz} + y = 0.$$
Ákvarðið síðan öll föll f sem fullnægja jöfnunni
$$f'(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{x}\right)$$
fyrir öll $x > 0$.

9.8 Veldisvísisfallið í tvinntalnasléttunni og hornaföllin

Við vitum að fyrir sérhvert x úr $\mathbb{R}$ gildir að $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ og þar sem röðin $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ er samleitin fyrir öll z úr $\mathbb{C}$ er eðlilegt að framlengja veldisvísisfallið yfir á allt $\mathbb{C}$ með því að setja

$$\operatorname{Exp}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Við ætlum að sýna fram á að þessi skilgreining gefi sama fallið og skilgreining (9.4.2), þ.e.a.s. að $\operatorname{Exp}(x+iy) = \exp(x+iy)$.

Setning 9.8.1. $\operatorname{Exp}(z+w) = \operatorname{Exp}(z) \cdot \operatorname{Exp}(w)$ *fyrir öll $z, w \in \mathbb{C}$.*

Sönnun. Látum $z, w \in \mathbb{C}$. Þar sem $\operatorname{Exp}(z+w) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n_0}^{N} \frac{(z+w)^n}{n!}$ og $\operatorname{Exp}(z) \cdot \operatorname{Exp}(w) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n_1}^{N} \frac{z^n}{n!} \sum_{n_1}^{N} \frac{w^n}{n!}$ þá nægir að sýna fram á að

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \sum_{n=0}^{N} \cdot \frac{w^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(z+w)^n}{n!} \right) = 0. \tag{1}$$

Látum N vera náttúrulega tölu. Reynum að meta stærðina

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \sum_{n=0}^{N} \cdot \frac{w^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(z+w)^n}{n!} \tag{2}$$

með því að nota tvíliðuformúluna getum við umritað seinni liðinn í (2)

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \tag{3}$$

Fyrri liðurinn í (2) er summa allra talnanna $\frac{z^j}{j!} \cdot \frac{w^k}{k!}$ þar sem j og k eru á milli 0 og N. Reiknum summuna þannig út að við tökum saman liði þar sem summa veldisvísanna $j+k$ er föst tala n milli 0 og N og leggjum þessar samantektir saman:

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{j+k=n} \frac{z^j}{j!} \frac{w^k}{k!}.$$

En þennan lið má umrita með því að setja $k = n - j$

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{j+k=n} \frac{z^j}{j!} \frac{w^k}{k!}$$

sem er einmitt $\sum_{n=0}^{N} \frac{(z+w)^n}{n!}$ samkvæmt (2). Í (2) stendur þá eftir summa þeirra liða $\frac{z^j}{j!} \frac{w^k}{k!}$ þar sem $j + k > N$. Reiknum þessa summu út líkt og áður var gert:

$$\sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{j+k=n} \frac{z^j}{j!} \frac{w^k}{k!} = \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{j=n-N}^{N} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{n-j}}{(n-j)!}$$

(j byrjar í $n - N$ vegna þess að $n - j \leq N$). Við fáum nú eftirfarandi gróft mat á (2)

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{j+k=n} \frac{z^j}{j!} \frac{w^k}{k!} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{j=n-N}^{N} \frac{|z|^j}{j!} \frac{|w|^{n-j}}{|n-j|!} \\
&\text{(setjum } r = \max\{|z|, |w|\}) \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{j=n-N}^{N} \frac{r^j}{j!} \frac{r^{n-j}}{(n-j)!} = \sum_{n=N+1}^{2N} r^n \sum_{j=n-N}^{N} \frac{1}{j!} \frac{1}{(n-j)!} \\
&= \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{r^n}{n!} \sum_{j=n-N}^{N} \frac{n!}{j!(n-j)!} \leq \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{r^n}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} \\
&\text{(notum tvíliðuformúluna á } 2^n = (1+1)^n) \\
&= \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{r^n}{n!} 2^n < \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{(2r)^n}{n!} \to 0
\end{aligned}$$

þegar $N \to \infty$ vegna þess að

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(2r)^n}{n!} = e^{2r}.$$

Þar með höfum við sýnt að (1) gildir. □

Látum nú ω vera ákveðna tvinntölu og lítum á fallið

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}; t \mapsto \operatorname{Exp}(\omega t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n t^n}{n!}.$$

Fyrir sérhvert n getum við klofið ω^n í raun- og þverhluta og skrifað $\omega^n = a_n + ib_n$. Þá fæst

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathrm{Exp}(\omega t) &= \frac{d}{dt}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n t^n}{n!} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n t^n}{n!}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n t^{n-1}}{(n-1)!} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n t^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\omega^n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \omega\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^{n-1}\cdot t^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \omega\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^n t^n}{(n-1)!} \\
&= \omega\cdot\mathrm{Exp}(\omega t).
\end{aligned}$$

Við höfum sýnt að fallið $\mathbb{R}\to\mathbb{C}; t\mapsto \mathrm{Exp}(\omega t)$ er lausn á diffurjöfnunni

$$y' = \omega y.$$

En í setningu 9.4.5 höfum við sýnt að sérhver tvinntölugild lausn diffurjöfnunnar er af gerðinni

$$y = A\exp(\omega t) \qquad \textit{með } A \textit{ úr } \mathbb{C}$$

svo að $\mathrm{Exp}(\omega t) = A\exp(\omega t)$ *fyrir eitthvert* A. *Með því að segja* $t = 0$ *fæst að* $A = 1$ *svo að* $\mathrm{Exp}(\omega t) = \exp(\omega t)$. *Að lokum:* $\mathrm{Exp}(x+iy) = \mathrm{Exp}(x)\cdot\mathrm{Exp}(iy) = \exp(x)\cdot\exp(iy) = \exp(x+iy)$ *vegna (1) og þess að* $\mathrm{Exp}(x) = \exp(x)$ *ef* $x\in\mathbb{R}$).

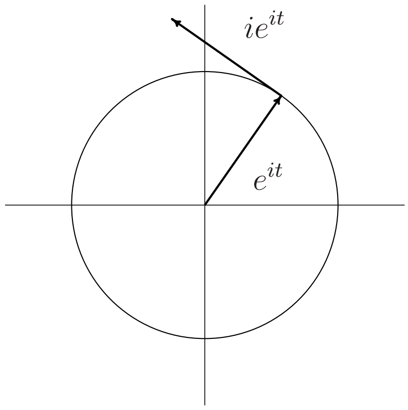
Tökum nú $\omega = i$ *og lítum á fallið* $\mathbb{R}\to\mathbb{C}; t\mapsto e^{it}$. *Um þetta fall gildir að*

$$\left|e^{it}\right|^2 = e^{it}\cdot\overline{e^{it}} = e^{it}\cdot e^{-it} = e^{it-it} = e^0 = 1$$

svo það varpar $\mathbb{R}$ *á einingarhringinn. Ennfremur gildir að*

$$\frac{d}{dt}(e^{it}) = ie^{it} \quad \textit{og} \quad \left|ie^{it}\right| = |i|\left|e^{it}\right| = 1.$$

Ef við ímyndum okkur að e^{it} *sé staða ákveðinnar agnar klukkan* t *þá lýsir vörpunin* $t \mapsto e^{it}$ *hreyfingu agnar eftir einingahringnum og þar sem hraðavigurinn hefur einingarlengd þá hreyfist ögnin með „einingarhraða“. Við höfum því leitt nokkur rök að því að vörpunin* $t \mapsto e^{it}$ *sé vörpunin sem við gengum út frá að væri til þegar við fjölluðum um hornaföllin í grein 3.3.*



Mynd 9.4:

Það er því eðlilegt að skilgreina föllin kósínus og sínus sem

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

og

$$\sin x = \operatorname{Im} e^{ix} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Nú gildir að

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

svo að

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}$$

og

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

í samræmi við dæmi 8.3.2.

Atriðisorðaskrá